

Centre de Préparation Interuniversitaire à l'Agrégation de
Physique de Montrouge

Ecole Normale Supérieure, Universités Paris 6, Paris 7, Paris 11

Année 2008/2009

Incertitudes expérimentales

F.-X. Bally et J.-M. Berroir

5 novembre 2008

Table des matières

1 Erreur et incertitude	4
1.1 Erreurs	4
1.1.1 Définition de l'erreur	4
1.1.2 Erreurs aléatoires et erreurs systématiques	4
1.2 Incertitude	5
1.3 Exemple d'un voltmètre numérique	6
1.4 Présentation d'un résultat expérimental	6
1.5 Comparaison entre valeur mesurée et valeur acceptée	7
2 Evaluation des incertitudes aléatoires	7
2.1 Analyse statistique d'une série de mesures	7
2.1.1 Meilleure estimation de la moyenne de la distribution des valeurs de x	8
2.1.2 Meilleure estimation de l'écart-type de la distribution des valeurs de x	8
2.1.3 Ecart-type de la moyenne	8
2.1.4 Exemple pratique d'analyse statistique d'une série de mesures	9
2.2 Propagation des incertitudes	10
2.2.1 A l'Ancienne : l'incertitude est un majorant de l'erreur	10
2.2.2 Propagation des incertitudes indépendantes (Méthode Moderne)	12
3 Vérification d'une loi physique.	
Ajustement de données expérimentales par une fonction	15
3.1 Régression linéaire	15
3.1.1 Meilleure estimation des paramètres a et b	16
3.1.2 Incertitudes σ_a et σ_b sur les paramètres a et b	17
3.1.3 Accord de données expérimentales avec une loi linéaire	18
3.1.4 Coefficient de corrélation linéaire	19
3.1.5 Le χ^2	19
3.2 Cas général d'un ajustement par une loi $y = f(x)$	20

Annexe : Rappels élémentaires de statistique	22
A.1 Distribution de probabilité d'une grandeur aléatoire	22
A.2 Valeur moyenne et écart-type	22
A.3 Exemples de distributions de probabilité	22
A.4 Importance physique de la Loi Normale	24

1 Erreur et incertitude

Beaucoup de scientifiques confondent ces deux termes et parlent de calculs d'erreurs au lieu de calculs d'incertitudes.

1.1 Erreurs

1.1.1 Définition de l'erreur

Lors de la mesure d'une grandeur physique x , l'erreur est la différence entre la valeur mesurée ¹ x et la valeur vraie X . *La valeur vraie est en général inconnue* (puisqu'on la cherche).

1.1.2 Erreurs aléatoires et erreurs systématiques

a. Erreurs aléatoires

Lorsqu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule en opérant avec un chronomètre manuel, on constate qu'en répétant les mesures on trouve des résultats légèrement différents, dus surtout aux retards de déclenchement qui vont réduire ou accroître la valeur de la période suivant qu'ils ont lieu au début ou à la fin de la mesure. Ce phénomène sera détecté par une étude statistique. On parle d'erreur aléatoire. Le résultat de la mesure est caractérisé par une distribution de probabilité ² répartie autour de la valeur vraie dans le cas d'erreurs purement aléatoires.

b. Erreurs systématiques

Supposons maintenant qu'on mesure la période d'oscillation d'un pendule avec un chronomètre faussé qui indique toujours des temps 2 % trop faibles. L'étude statistique ne le détectera pas. On parle d'erreur systématique. Plus généralement les erreurs systématiques ont des origines diverses :

- erreur d'étalonnage

Exemple : Millikan a trouvé une valeur inexacte de la charge de l'électron parce qu'il avait pris une valeur fautive de la viscosité de l'air.

- oubli d'un paramètre

Exemple : influence de la température sur la vitesse du son (si on ne précise pas la température il est impossible de comparer la mesure à une valeur de référence)

- procédure erronée

Exemple : mesure d'une résistance sans tenir compte de la résistance de l'ampèremètre et du voltmètre...

Les erreurs systématiques sont difficile à détecter a priori, mais une fois détectées, on peut souvent les corriger (par exemple en tenant compte de la résistance de l'ampèremètre et du voltmètre lors de la mesure d'une résistance).

On représente classiquement les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec un tir sur cible (cf. figure 1), le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :

- si tous les impacts sont proches du centre : faibles erreurs aléatoires et faible erreur systématique

¹Pour simplifier les notations, dans toute la suite on désigne par la même lettre x la grandeur physique et sa valeur mesurée.

²Des rappels élémentaires de statistiques sont présentés en annexe.

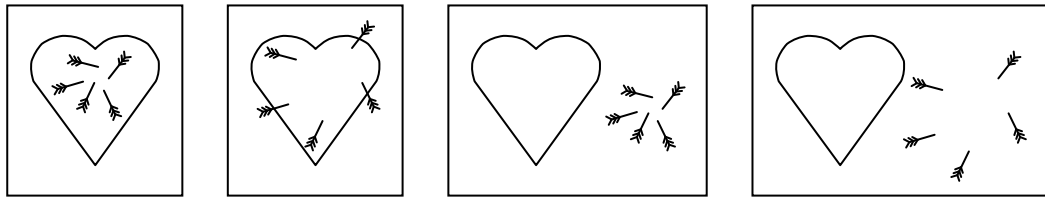


Fig. 1 - Rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques

- si les impacts sont très étalés mais centrés en moyenne sur la cible : fortes erreurs aléatoires et faible erreur systématique
 - si les impacts sont groupés mais loin du centre : faibles erreurs aléatoires et forte erreur systématique
 - si les impacts sont étalés et loin du centre : fortes erreurs aléatoires et forte erreur systématique.
- Le défaut de cette analogie est qu'en général, dans les mesures physiques on ne connaît pas le centre de la cible !

Un exemple plus complexe : si on mesure une distance avec une règle en métal souple, la flexion de la règle va introduire une erreur systématique (la distance lue est toujours trop grande) et aléatoire (la flexion de la règle est variable).

1.2 Incertitude

L'incertitude δx traduit les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur aléatoire commise. En absence d'erreur systématique, elle définit un intervalle autour de la valeur mesurée qui inclut la valeur vraie avec une probabilité plus ou moins grande. La détermination de l'incertitude n'est pas simple a priori. **On rencontre en pratique deux choix :**

- **On cherche un majorant $\delta^{maj}x$ de l'erreur (Méthode à l'Ancienne ³)**
Ce majorant est estimé assez grossièrement à partir de l'appareil de mesure et des conditions expérimentales.
Exemple : dans une expérience d'interférences avec les fentes d'Young, on mesure la distance d (de l'ordre du mètre) entre les bifentes et l'écran avec une règle graduée en centimètres. Admettant qu'à chaque extrémité l'erreur ne peut pas dépasser 1 cm on choisit $\delta^{maj}d = 2$ cm. Et si on utilise une règle graduée en millimètres ? Décider d'une incertitude égale à 2 mm serait illusoire, en effet au fur et à mesure que la précision d'affichage de l'instrument augmente, il faut accroître l'analyse des causes d'erreur. Ainsi dans le cas présent la position de la bifente placée dans son support est difficile à repérer précisément à l'échelle du mm alors qu'elle était facile à repérer à l'échelle du cm. Cette méthode est apparemment simple et intellectuellement satisfaisante, mais le souci de majorer conduit à des intervalles très larges qui ont peu d'intérêt pratique. De plus la présence des incertitudes systématiques (voir le paragraphe 1.1.2) remet en cause la certitude apparente.
- **δx est évalué statistiquement (Méthode Moderne à utiliser à l'agrégation)**
On cherche dans ce cas à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de x , en évaluant le mieux possible la valeur moyenne et l'écart-type de cette distribution. Ceci se fait par l'analyse statistique d'un ensemble de mesures de x (cf. partie 2). En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur

³Il est clair que la Méthode à l'Ancienne est obsolète et ne doit donc pas être utilisée. On en parle ici car elle facilite l'explication de certaines opérations (cf. 2.2.1)

vraie X tandis que l'incertitude δx , directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie de X se trouve avec une probabilité connue.

Note : dans le cadre stressant de l'agrégation on ne dispose pas toujours du temps nécessaire pour faire une série de mesures. Dans ce cas on fera une estimation de δx comme dans le cas du majorant mais en choisissant un intervalle plus restreint, correspondant à une erreur typique. En reprenant l'exemple de l'expérience d'interférences avec une règle graduée en cm, on estime généralement l'incertitude statistique δx sur la position d'une extrémité de la règle à $1/4$ de division.

1.3 Exemple d'un voltmètre numérique

En ouvrant la notice d'un voltmètre numérique, on trouve typiquement les indications suivantes : la précision de la mesure est donnée par ± 2 fois le dernier digit $\pm 0,1\%$ de la valeur lue. On peut considérer que l'incertitude donnée par le fabricant a 2 origines⁴ :

- celle qui provient d'une erreur de calibrage (variable d'un appareil à l'autre, d'un calibre à l'autre...). Cette erreur est systématique quand on utilise le même calibre d'un même appareil. Elle devient aléatoire quand on utilise plusieurs calibres ou plusieurs appareils, même de modèles identiques. Elle est essentiellement présente dans les $\pm 0,1\%$ de la valeur lue.
- celle qui provient d'erreurs aléatoires (bruit...). Elle est essentiellement présente dans les ± 2 fois le dernier digit.

1.4 Présentation d'un résultat expérimental

L'écriture rapportant la mesure d'une grandeur physique x est :

$$\text{valeur mesurée de } x = \bar{x} \pm \delta x$$

où \bar{x} est la meilleure estimation de la valeur vraie X et δx l'incertitude sur la mesure (incertitude absolue).

En l'absence d'erreurs systématiques, la valeur vraie de x se trouve probablement dans (ou proche de) l'intervalle allant de $\bar{x} - \delta x$ à $\bar{x} + \delta x$.

On définit aussi l'incertitude relative ou fractionnaire : $\delta x/|\bar{x}|$

Exemple : dans une expérience d'ondes stationnaires en acoustique on mesure la distance entre 7 nœuds de pression, on trouve 862 mm avec une incertitude absolue estimée à 20 mm (parce qu'on a du mal à repérer précisément les nœuds). A la calculatrice on obtient pour la longueur d'onde et pour l'incertitude absolue les résultats suivants : $862 / 3 = 287,333$ mm et $20 / 3 = 6,667$ mm.

- Compte tenu du nombre de chiffres significatifs de la mesure initiale on garde : $\lambda = 287,3$ mm.
- L'incertitude étant toujours évaluée grossièrement, on garde 1 à 2 chiffres significatifs : $\delta \lambda = 7$ mm.
- Le dernier chiffre significatif de la mesure doit être cohérent avec l'incertitude, on écrira donc :

$$\text{valeur mesurée de } \lambda = 287 \pm 7 \text{ mm} \quad \text{ou} \quad \text{valeur mesurée de } \lambda = 287 \text{ mm} \pm 2\%$$

⁴cf. 2.2.2.g.

1.5 Comparaison entre valeur mesurée et valeur acceptée

Ayant obtenu la valeur mesurée avec son intervalle d'incertitude, on la compare à la valeur de référence (pour une valeur expérimentale de référence, ne pas parler de valeur exacte, parler de *valeur tabulée*).

- dans le cas où l'incertitude est un majorant (Méthode à l'Ancienne) on s'attend à ce que l'intervalle contienne la valeur de référence.

Si ce n'est pas le cas, il faut invoquer des erreurs systématiques et/ou remettre en question l'estimation des incertitudes.

- Dans le cas des incertitudes statistiques (Méthode Moderne) il n'est pas anormal que l'intervalle ne contienne pas la valeur de référence. Ainsi dans le cas fréquent d'une distribution Gaussienne, le tableau 4 donné en annexe montre qu'il y a 32 % de chances soit environ une chance sur trois d'être dans ce cas.

On commencera à douter de la mesure lorsque l'écart atteint plus de $2 \delta x$ (probabilité que la mesure soit bonne : 1 chance sur 20 à $2 \delta x$ et 1 chance sur 100 à $2,5 \delta x$ pour une distribution Gaussienne). Si c'est le cas il faut invoquer des erreurs systématiques.

Exemple pratique : on mesure la vitesse du son dans l'air à 20°C . On effectue une série de mesures qui conduit à $\bar{v} = 335 \text{ m.s}^{-1}$ et à une incertitude statistique $\delta v = 5 \text{ m.s}^{-1}$. On a donc : valeur mesurée de $v = 335 \pm 5 \text{ m.s}^{-1}$. La valeur tabulée indiquée à cette température : $v = 343 \text{ m.s}^{-1}$. Elle est en-dehors du domaine d'incertitude, mais l'écart entre 343 et 335 vaut $1,6 \delta v$. La table donnée en annexe (paragraphe A.3) indique qu'il y a environ une chance sur 10 pour que ce cas se produise. On pourra considérer que la mesure est valide, mais néanmoins pas très satisfaisante.

Il n'est pas possible de tenir compte des erreurs systématiques dans un calcul d'incertitude, c'est pourquoi on les supposera négligeables, quitte à revenir à la fin sur cette supposition en cas de désaccord entre la valeur trouvée et la valeur tabulée ⁵.

2 Evaluation des incertitudes aléatoires

L'évaluation d'une incertitude expérimentale à partir de l'étude statistique directe de la grandeur physique recherchée est présentée dans la partie 2.1. Dans la partie 2.2, on donne les méthodes de calcul d'une incertitude dans le cas où une formule mathématique relie la grandeur physique étudiée aux diverses grandeurs effectivement mesurées.

2.1 Analyse statistique d'une série de mesures

On s'intéresse ici à la mesure d'une grandeur physique x uniquement sujette à des incertitudes aléatoires. Dans les deux premiers paragraphes, on décrit les méthodes statistiques qui permettent d'évaluer la valeur vraie de x et les incertitudes aléatoires. Dans le dernier paragraphe, on montre comment réduire l'incertitude sur la détermination de x .

Le traitement statistique des incertitudes aléatoires est basé sur la répétition des mesures de x . Si on était capable de réaliser une infinité de mesures, on déterminerait la distribution de probabilité de x , en particulier sa valeur moyenne X (ou valeur vraie) et son écart type σ . Dans la pratique, on réalise un nombre fini n de mesures, de résultats respectifs x_1, x_2, \dots, x_n , dont on cherche à extraire les meilleures estimations de X et σ . Les méthodes statistiques qui permettent d'obtenir ces meilleures estimations sont présentées dans les paragraphes suivants, sans démonstration.

⁵A contrario, le fait de trouver un bon accord ne prouve pas qu'il n'y a pas d'erreur systématique : il peut y en avoir plusieurs qui se compensent.

2.1.1 Meilleure estimation de la moyenne de la distribution des valeurs de x

La meilleure estimation de la valeur vraie X , notée \bar{x} , obtenue à partir des n mesures x_1, x_2, \dots, x_n est la moyenne de ces mesures ⁶.

$$\text{Meilleure estimation de } X = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

2.1.2 Meilleure estimation de l'écart-type de la distribution des valeurs de x

La meilleure estimation de σ déduite des n mesures x_1, x_2, \dots, x_n , notée σ_x , est donnée par ⁶ :

$$\text{Meilleure estimation de } \sigma = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Note : Le facteur $n - 1$, et non pas n , vient du fait que la formule ci-dessus utilise \bar{x} , seule quantité accessible à l'expérience, et non pas X . Il est aisé de s'en souvenir : on conçoit bien qu'il n'est pas possible d'estimer l'écart-type d'une distribution à partir d'une seule mesure.

Il est maintenant légitime de se poser la question de la précision de ces estimations, en particulier de celle de la moyenne.

2.1.3 Ecart-type de la moyenne

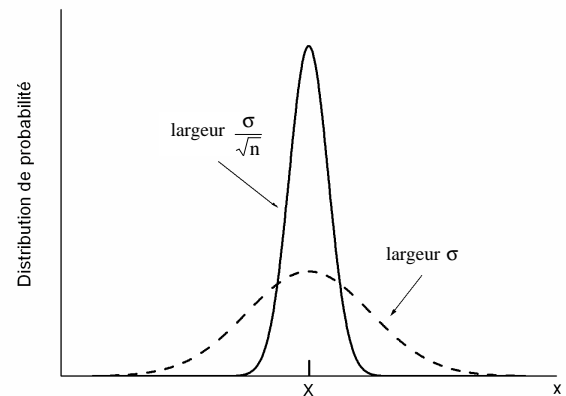
En répétant de nombreuses fois l'expérience consistant à mesurer n valeurs de la grandeur x dont on prend ensuite la valeur moyenne, on obtient la distribution de probabilité de \bar{x} . La valeur moyenne de cette distribution est X . Son écart-type, noté $\sigma_{\bar{x}}$ et aussi appelé écart-type de la moyenne, est donné par :

$$\text{Incertitude sur } \bar{x} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ représente l'incertitude sur la détermination de la valeur vraie X à partir de la moyenne de n mesures. Cette détermination est donc \sqrt{n} fois plus précise que celle obtenue à partir d'une mesure unique (voir figure 2). Dans la pratique, \sqrt{n} croît lentement et améliorer la précision d'un facteur 10 oblige à effectuer 100 fois plus de mesures.

⁶La démonstration de ce résultat est assez simple dans le cas où la grandeur à mesurer a une distribution de probabilité gaussienne (cf. *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, paragraphe 5.5, p. 128 et annexe E1, p.280, J.R. Taylor, Editions Dunod, 2000). Les meilleures estimations pour X et σ maximisent la probabilité $P_{X,\sigma} \propto 1/\sigma^n e^{-\sum(x_i - X)^2/2\sigma^2}$ d'obtenir les résultats x_1, \dots, x_n lors de n mesures. On obtient \bar{x} (resp. σ_x) en dérivant $P_{X,\sigma}$ par rapport à X (resp. σ) à x_i fixés.

Fig. 2 - Lorsqu'on effectue une mesure unique, la valeur trouvée suit la distribution de probabilité représentée en pointillés. n mesures indépendantes se répartissent aléatoirement sur cette courbe. Lorsqu'on prend la valeur moyenne de ces n mesures, les écarts à la valeur vraie se compensent statistiquement, avec d'autant plus d'efficacité que n est grand. Si on réalise plusieurs déterminations de la moyenne de n mesures, elles suivent la distribution en trait plein.



En pratique σ n'est pas connu et on utilise son évaluation σ_x pour déterminer $\sigma_{\bar{x}}$. Dans le cas où on effectue une moyenne sur un petit nombre de mesures, σ_x n'est pas une bonne estimation de σ et la théorie montre qu'il faut alors utiliser $\sigma_{\bar{x}} = t \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ où t est appelé *coefficient de Student*. Ce coefficient, qui est tabulé, dépend du nombre de points moyennés et du niveau de confiance ⁷. A l'agrégation, il est suffisant de ne pas parler de ce coefficient ce qui revient à le prendre égal à 1 quel que soit le nombre de mesures (voir l'exemple du paragraphe suivant).

En résumé, si on réalise n mesures de x , avec les résultats x_1, x_2, \dots, x_n , on écrira le résultat final sous la forme :

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

2.1.4 Exemple pratique d'analyse statistique d'une série de mesures

Huit étudiants mesurent la longueur d'onde de la raie verte du mercure en utilisant une fente fine éclairée par la lampe, une lentille et un réseau. Ils obtiennent les résultats suivants :

i (n° de l'étudiant)	1	2	3	4	5	6	7	8
λ trouvée (nm)	538,2	554,3	545,7	552,3	566,4	537,9	549,2	540,3

Tab. 1 - Mesures indépendantes de la raie verte du mercure

En utilisant un logiciel de traitement des données ⁸, on obtient : $\bar{\lambda} = 548,04$ nm et $\sigma_{\lambda} = 9,72$ nm. On en déduit que l'incertitude sur la moyenne des 8 mesures vaut : $\delta\lambda = \sigma_{\bar{\lambda}} = 9,72/\sqrt{8} = 3,44$ nm. On peut donc écrire : meilleure estimation de $\lambda = 548 \pm 3$ nm ou $545 \leq \lambda \leq 551$ nm. On peut comparer à la valeur tabulée : $\lambda_{tab} = 545,07$ nm et conclure qu'il y a une bonne concordance.

Remarque 1 : L'incertitude $\delta\lambda$ est calculée à partir de σ_{λ} qui est une estimation de l'écart-type de la distribution des mesures de λ . Cette estimation, correcte dans le cas d'un grand nombre de mesures,

⁷Ici on utilise un niveau de confiance correspondant à un écart-type (68%), certains auteurs préfèrent utiliser un niveau de confiance correspondant à 2 écart-types (95%)

⁸- Sous Igor, utiliser (Analysis → Statistics : $V_{avg} = \bar{x}$ et $V_{sdev} = \sigma_x$)
- Sous Synchronie, le module *Statistiques* ne donne pas σ_x mais $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_x$, qui est en pratique très voisin de σ_x
- Sous Excel, utiliser (Insertion → Fonction : MOYENNE = \bar{x} et ECARTYPE = σ_x)
- Sous Kaleidagraph, utiliser (Functions → Statistics : Mean et Std Deviation)

devient imprécise si ce nombre est faible. La loi de Student mentionnée au paragraphe 2.1.3 permet de tenir compte de cet effet. Le tableau 2 donne les valeurs du coefficient t en fonction du nombre de mesures pour un intervalle de confiance de 68%.

Tab. 2 - Coefficient de Student

nombres de mesures n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40	∞
Coefficient de Student t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01	1,00

Le tableau 2 donne $t = 1,08$ pour 8 mesures (pour un nombre infini de mesures, $t = 1$). On doit donc écrire en toute rigueur : $\lambda = \bar{\lambda} \pm t \times \frac{\sigma_{\lambda}}{\sqrt{n}} = 548,04 \pm 1,08 \times 9,72/\sqrt{8} = 548 \pm 4 \text{ nm}$. Cet exemple montre qu'on peut oublier la correction de Student dans le cadre de l'agrégation.

Remarque 2 : Elle concerne le rejet de certains points de mesure considérés comme *aberrants*. Ainsi, la mesure de l'étudiant n° 5 présente un tel écart à la valeur moyenne qu'on peut se demander s'il faut la conserver. Cet écart, de 18,4 nm doit être comparé à σ_{λ} (et pas à $\sigma_{\bar{\lambda}}$) car il s'agit d'une mesure unique. On trouve qu'il vaut $2\sigma_{\lambda}$. D'après le tableau du paragraphe A.3, la probabilité d'obtenir une mesure située à plus de 2 écart-types de la moyenne est de 0,05. Sur 8 mesures, on s'attend donc à en trouver $8 \times 0,05 = 0,4$ dans cette situation. Ce nombre est sensiblement inférieur à 1 et il est raisonnable d'éliminer cette donnée⁹.

2.2 Propagation des incertitudes

On s'intéresse ici au problème suivant : on connaît les grandeurs expérimentales x, y, \dots avec les incertitudes $\delta x, \delta y, \dots$. Quelle est l'incertitude δq sur la grandeur $q = f(x, y, \dots)$?

2.2.1 A l'Ancienne : l'incertitude est un majorant de l'erreur

Dans ce cas $\delta^{maj}x, \delta^{maj}y, \dots$ sont des majorants de l'erreur sur x, y, \dots et on cherche le majorant de l'erreur sur q . On note \bar{x}, \bar{y}, \dots les meilleures estimations de x, y, \dots .

a. Exemple de la somme : $q = x + y$

La plus grande valeur accessible à q est :

$$q_{max} = x_{max} + y_{max} = (\bar{x} + \delta^{maj}x) + (\bar{y} + \delta^{maj}y) = (\bar{x} + \bar{y}) + (\delta^{maj}x + \delta^{maj}y)$$

De même la plus petite valeur accessible à q est :

$$q_{min} = x_{min} + y_{min} = (\bar{x} - \delta^{maj}x) + (\bar{y} - \delta^{maj}y) = (\bar{x} + \bar{y}) - (\delta^{maj}x + \delta^{maj}y)$$

On en déduit que :

$$\delta^{maj}(x + y) = \delta^{maj}x + \delta^{maj}y$$

b. Exercice : cas de la différence $q = x - y$ et du produit $q = x * y$

En procédant de même, établir que :

$$\delta^{maj}(x - y) = \delta^{maj}x + \delta^{maj}y$$

et

⁹Un critère usuellement retenu est d'éliminer les données qui correspondent à un nombre d'occurrences prévu inférieur à 0,5.(cf. *Incertainces et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, chapitre 6, J.R. Taylor, Editions Dunod, 2000)

$$\frac{\delta^{maj}(x * y)}{|x * y|} = \frac{\delta^{maj}x}{|x|} + \frac{\delta^{maj}y}{|y|}$$

c. Cas général : $q = f(x, y, \dots)$

On considère que les incertitudes sont petites. On peut écrire au 1er ordre, pour des petites variations de x et y :

$$dq = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$$

On en déduit :

$$\delta^{maj}q = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta^{maj}x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta^{maj}y + \dots$$

Exemple : $q = 2/x + 3/y^2$

On prend la différentielle des 2 membres : $dq = (-2/x^2) dx + (-6/y^3) dy$.

On en déduit : $\delta^{maj}q = (2/x^2) \delta^{maj}x + |6/y^3| \delta^{maj}y$.

d. Calcul direct de l'incertitude relative

Dans le cas où q contient des produits, rapports ou puissances, on a intérêt à utiliser la différentielle logarithmique pour exprimer directement l'incertitude relative sur q en fonction des incertitudes sur x, y, \dots

Premier Exemple : $q = -3xy^2/z$

On prend le logarithme népérien de la valeur absolue des deux membres :

$$\ln|q| = \ln|-3| + \ln|x| + 2\ln|y| - \ln|z|$$

puis on calcule la différentielle :

$$dq/q = dx/x + 2dy/y - dz/z$$

On en déduit :

$$\delta^{maj}q/|q| = \delta^{maj}x/|x| + 2\delta^{maj}y/|y| + \delta^{maj}z/|z|$$

Deuxième exemple : $q = (x - y)/(x + y)$ (on suppose $x - y > 0$ et $x + y > 0$)

Cet exemple est intéressant car les influences de x au numérateur et au dénominateur se compensent partiellement (si x augmente, numérateur et dénominateur augmentent donc q varie peu). La différentielle logarithmique conduit à :

$$dq/q = dx/(x - y) - dy/(x - y) - dx/(x + y) - dy/(x + y).$$

Pour une bonne estimation du majorant de l'erreur sur q , il faut impérativement mettre en facteur dx et dy :

$$dq/q = [1/(x - y) - 1/(x + y)] dx + [-1/(x - y) - 1/(x + y)] dy$$

avant de prendre les valeurs absolues :

$$\delta^{maj}q/|q| = |1/(x - y) - 1/(x + y)| \delta^{maj}x + |1/(x - y) + 1/(x + y)| \delta^{maj}y$$

La compensation évoquée ci-dessus se traduit par le signe - dans le terme en facteur de $\delta^{maj}x$.

e. Exemple pratique

On mesure la période T d'un pendule en chronométrant manuellement 20 oscillations. On déclenche et arrête le chronomètre aux instants t_1 et t_2 où le pendule passe par la position d'équilibre. On a $T = (t_2 - t_1)/20$. On a mesuré $t_1 = 0$ et $t_2 = 13,8$ s. On estime : $\delta^{maj}t_1 = \delta^{maj}t_2 = 0,5$ s. La

formule générale donne : $\delta^{maj}T = |1/20| \delta^{maj}t_2 + |-1/20| \delta^{maj}t_1 = 0,05 \text{ s}$.

Les défauts de la Méthode à l'Ancienne : le calcul fait ici est cohérent avec le fait qu'on cherche un majorant de l'erreur. Cependant il a pour défaut de donner un intervalle très large. En effet, la probabilité que l'erreur sur t_1 soit proche du majorant $\delta^{maj}t_1$ ou du minorant $-\delta^{maj}t_1$ est très faible. Il en est de même pour t_2 . Or la formule utilisée pour évaluer $\delta^{maj}T$ suppose que, simultanément, t_1 est proche de son majorant **et** que t_2 est proche de son minorant (ou l'inverse), ce qui est extrêmement improbable.

Un autre défaut, plus gênant encore, de la Méthode à l'Ancienne est que l'estimation d'une grandeur physique par la moyenne de n mesures indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n de mêmes incertitudes $\delta^{maj}x$ n'apporte aucune réduction de l'incertitude par rapport à une mesure unique.

En effet, si $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ alors $\delta^{maj}\bar{x} = (n \times \delta^{maj}x)/n = \delta^{maj}x$.

La méthode statistique décrite ci-dessous élimine ces inconvénients.

2.2.2 Propagation des incertitudes indépendantes (Méthode Moderne)

Dans ce cas $\delta x = \sigma_{\bar{x}}, \delta y = \sigma_{\bar{y}}, \dots$ et on cherche $\delta q = \sigma_{\bar{q}}$.

a. Cas de la somme : $q = x + y$

Si les erreurs sur x et y sont indépendantes, on peut montrer que ¹⁰ :

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$$

On dit que les incertitudes s'ajoutent en quadrature ¹¹. L'addition en quadrature donne un résultat plus faible que l'addition en module. En effet, $\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \leq \delta x + \delta y$. L'addition en quadrature présente l'avantage de ne pas surestimer l'incertitude. Ainsi, δq correspond au même niveau de probabilité que δx et δy (68 % par défaut).

b. Cas général : $q = f(x, y, \dots)$

Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, on montre que ¹⁰ :

$$\delta q = \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 (\delta x)^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 (\delta y)^2 + \dots}$$

c. Premier exemple pratique

On revient sur la mesure de la période du pendule obtenue en chronométrant 20 oscillations (cf. paragraphe 2.2.1.e.).

La formule de propagation des incertitudes donne : $\delta T = \sqrt{|1/20|^2 \delta t_2^2 + |-1/20|^2 \delta t_1^2}$

Si on prend $\delta t_1 = \delta t_2 = 0,5 \text{ s}$, on trouve $\delta T = 0,035 \text{ s}$ qui est, comme attendu, inférieur à la valeur trouvée par la méthode du majorant. De plus, le choix $\delta t_1 = \delta t_2 = 0,5 \text{ s}$ n'est pas satisfaisant, car ces valeurs, choisies au paragraphe 2.2.1.e. sont des majorants de l'erreur. En fait, on pourra prendre $\delta t_1 = \delta t_2 = 0,2 \text{ s}$ qui correspond à l'erreur typique que l'on estime pouvoir faire (cf. 1.2 à

¹⁰On trouvera une justification de ce résultat dans *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Paragraphe 5.6, p. 132, J.R. Taylor, Editions Dunod, 2000.

¹¹De même qu'en optique, on additionne les intensités de 2 sources incohérentes et pas leurs amplitudes.

la fin). On obtient alors $\delta T = 0,014$ s. Et on peut dire qu'il y a (très approximativement, il s'agit d'un ordre de grandeur !) 2 chances sur 3 (68 %) pour que l'erreur aléatoire sur T soit inférieure à cette valeur.

d. Deuxième exemple pratique

On détermine une puissance électrique par la formule $P = RI^2$. On mesure $R = 15,7 \Omega$ avec $\delta R = 1 \Omega$ (car on a constaté des problèmes de contact) et $I = 0,274$ A avec $\delta I = 0,002$ A (d'après le fabricant de l'appareil). On en déduit la formule de propagation des incertitudes indépendantes : $\delta P/P = \sqrt{(\delta R/R)^2 + 4(\delta I/I)^2} = \sqrt{4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}} \approx \sqrt{4 \cdot 10^{-3}} \approx 0,06$ ou 6%. On remarque que l'incertitude sur l'intensité est négligeable. Le fait d'élever au carré favorise ce phénomène ¹².
De manière générale, Il est important de comparer les incertitudes des différentes grandeurs mesurées. Il est clair que dans l'exemple ci-dessus, la principale cause d'erreur porte sur la résistance et que si on veut améliorer la mesure de P , c'est sur elle qu'il faut porter ses efforts. Il ne servirait à rien d'acheter un ampèremètre haut de gamme.

e. Troisième exemple pratique

Pour trouver la capacité thermique c d'un liquide lors d'une expérience de calorimétrie, on mesure l'élévation de température d'une certaine quantité de ce liquide dans laquelle on dissipe une énergie électrique connue. On obtient la capacité thermique cherchée par la formule : $c = UIt/[m(\theta_2 - \theta_1)]$ où U , I , t , m et $(\theta_2 - \theta_1)$ représentent respectivement une tension, une intensité, une durée, une masse et une variation de température. On a estimé : $\delta U/U = 1\%$, $\delta I/I = 2\%$, $t = 153$ s, $\delta t = 2$ s, $m = 345$ g, $\delta m = 5$ g, $\theta_1 = 19,3^\circ C$, $\theta_2 = 20,3^\circ C$ et $\delta \theta = 0,1^\circ C$. Le calcul d'incertitude montre que la seule incertitude qui joue un rôle est celle sur les températures ; on obtient finalement : $\delta c/c \approx 2\delta \theta/(\theta_2 - \theta_1) = 20\%$. Les commentaires du paragraphe précédent s'appliquent encore ici. On constate aussi qu'il faut si possible éviter l'apparition de petites différences : l'incertitude relative sur la différence de 2 nombres très voisins est grande. Pour améliorer cette expérience il faudrait accroître nettement la variation de température en augmentant la durée de l'expérience et/ou l'intensité du courant.

f. Cas où les incertitudes ne sont pas au même niveau de confiance

Certains fabricants indiquent la précision de leurs appareils en utilisant l'*incertitude-standard* qui correspond à 1 écart-type donc à un niveau de confiance de 68 %. D'autres utilisent l'*incertitude-élargie* qui correspond à un niveau de confiance de 95 % soit environ 2 écarts-types ¹³.

Exemple : on détermine une puissance par la relation $P = UI$. On mesure $I = 1,27$ A avec une incertitude-standard égale à 0,02 A. On mesure $U = 15,24$ V avec une incertitude-élargie égale à 0,06 V. On peut donc poser : $\delta I = 0,02$ A et comme l'incertitude-élargie vaut le double de l'incertitude-standard : $\delta V = 0,03$ V.

On en déduit : $\delta P/P = \sqrt{(0,02/1,27)^2 + (0,03/15,24)^2} \approx 2\%$.

g. Cas d'erreurs aléatoires liées

La loi de propagation des incertitudes indépendantes suppose que les variables x , y ,... ont des erreurs aléatoires indépendantes. Si cette condition n'est pas vérifiée, la formule de combinaison quadratique ne s'applique pas. Par contre l'inégalité non quadratique suivante est toujours vérifiée (cf. 2.2.2.a.) :

$$\delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \delta y + \dots$$

¹²Dans un calcul à l'Ancienne, on aurait à comparer $\delta R/R$ à $2\delta I/I$ soit $6 \cdot 10^{-2}$ à $2 \cdot 10^{-2}$ et l'incertitude sur I ne serait alors pas négligeable.

¹³En réalité, la norme définissant les incertitudes des instruments est plus complexe que ce qui est présenté ici, qui devrait cependant largement suffire au niveau de l'agrégation. (cf. BUP 889, cahier n 2, p. 219, *Expression et évaluation des incertitudes de mesures*, J.-L. Bretonnet).

On va voir cependant sur une exemple pratique que cette inégalité risque d'être de peu d'intérêt.

Exemple pratique : Un fabricant de voltmètres grand public effectue un test statistique sur ses appareils et trouve que l'incertitude-type vaut 3 %. Il l'indique dans la notice en précisant que l'incertitude aléatoire de chaque appareil est négligeable et que l'incertitude annoncée provient des défauts d'étalonnage d'un appareil à l'autre (par mesure d'économie les appareils ne sont pas réglés en sortie de la chaîne de production). Il faut comprendre que pour l'utilisateur d'un appareil, il s'agit d'une incertitude aléatoire (sauf s'il procédait à un étalonnage de son appareil, ce qu'il ne fait pas, ne disposant pas d'un appareil de référence).

L'utilisateur mesure 2 tensions voisines : $V_1 = 12,71 \text{ V}$ et $V_2 = 9,32 \text{ V}$ afin de déterminer $V_3 = V_1 - V_2$ et $V_4 = V_1 + V_2$.

- S'il utilise 2 voltmètres, l'un pour mesurer V_1 , l'autre pour mesurer V_2 , les incertitudes aléatoires $\delta V_1 = 12,71 \times 0,03 = 0,4 \text{ V}$ et $\delta V_2 = 0,3 \text{ V}$ sont indépendantes et il applique donc la combinaison quadratique :

$$\delta V_3 = \delta V_4 = \sqrt{(0,4)^2 + (0,3)^2} = 0,5 \text{ V}.$$

- S'il utilise le même voltmètre sur le même calibre pour mesurer V_1 et V_2 , les deux incertitudes deviennent liées (si V_1 est trop grand, V_2 est trop grand en proportion). En utilisant la notation différentielle, on peut écrire : $dV_3 = dV_1 - dV_2$ avec $dV_2/V_2 = dV_1/V_1$ puisqu'il y a uniquement une erreur de calibrage. On en déduit $dV_3 = dV_1(1 - V_2/V_1)$ puis, en passant aux incertitudes, $\delta V_3 = \delta V_1 |1 - V_2/V_1| = 0,1 \text{ V}$ qui est très inférieur à la valeur obtenue avec 2 voltmètres. De même, on trouve $\delta V_4 = \delta V_1 |1 + V_2/V_1| = 0,7 \text{ V}$. Pour V_4 , l'incertitude obtenue avec un voltmètre est supérieure à celle obtenue avec 2 voltmètres. En réalité chaque appareil a en plus une incertitude aléatoire qui lui est propre et qui vient compliquer l'étude mais atténuer l'effet des erreurs liées.

En conclusion, on suggère pour l'agrégation la stratégie suivante : dans une expérience où on mesure 2 grandeurs x et y pour calculer $q(x, y)$, commencer par faire un calcul d'incertitudes quadratique présupposant les erreurs indépendantes. Puis, si on utilise le même appareil sur le même calibre pour mesurer x et y , faire remarquer que suivant l'expression de $q(x, y)$, les erreurs liées sur x et y se retranchent ou s'additionnent lorsqu'on évalue l'incertitude sur q , ce qui tend à diminuer ou à augmenter l'incertitude sur q .

3 Vérification d'une loi physique. Ajustement de données expérimentales par une fonction

Dans les expériences d'agrégation, on cherche souvent à vérifier une loi physique reliant 2 grandeurs distinctes. Ainsi, dans le montage sur les semiconducteurs, on est amené à vérifier que la tension de Hall V_H aux bornes d'un échantillon semiconducteur est reliée de manière linéaire au champ magnétique B par $V_H = (I/n_p e)B$ où I est le courant qui traverse l'échantillon et n_p est le nombre de porteurs par unité de volume du semiconducteur. En mesurant V_H pour différentes valeurs de B à I fixé, on souhaite d'une part vérifier expérimentalement que la relation liant V_H à B est linéaire et d'autre part déterminer la valeur de n_p . Plus généralement, on cherche à vérifier que 2 grandeurs x et y sont reliées par une loi du type $y = f(x)$ où f est une fonction dépendant d'un certain nombre de paramètres. On mesure une série de n valeurs x_1, x_2, \dots, x_N et les valeurs correspondantes y_1, y_2, \dots, y_n . L'objet des paragraphes suivants est de montrer comment on détermine les meilleures valeurs des paramètres de la fonction f à partir de ces mesures, d'abord dans le cas linéaire puis dans le cas général. On présente également des outils qui permettent d'estimer dans quelle mesure la fonction f ainsi déterminée s'ajuste aux données expérimentales.

3.1 Régression linéaire

Dans de nombreux cas, on cherche à savoir dans quelle mesure des données expérimentales s'accordent avec une loi linéaire¹⁴ du type $y = a + bx$. On cherche également une estimation des paramètres a et b et on souhaite connaître la précision de cette estimation.

On supposera ici que les incertitudes sur x sont négligeables devant celles sur y (on peut très souvent se ramener à cette situation car il est très fréquent que les incertitudes relatives sur une variable soient beaucoup plus faibles que les incertitudes relatives sur l'autre).

On dispose donc d'un tableau de n mesures $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ et éventuellement pour chacune de ces mesures, de l'incertitude associée à la mesure de y (on note alors σ_i^{exp} l'incertitude sur y_i).

On commence par représenter graphiquement les différents couples de points. A titre d'exemple, on a représenté sur la figure 3.a les données du tableau 3 (ici $n = 12$).

Tab. 3 - Données utilisées pour les exemples de régression linéaire

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y	14,79	33,52	36,50	51,88	63,11	66,94	74,58	92,46	89,50	109,29	117,40	118,37

On appelle ensuite le programme de modélisation mathématiques (ou fit¹⁵) du logiciel utilisé¹⁶. Celui-ci trace la meilleure droite passant par les points en utilisant les résultats du paragraphe suivant.

¹⁴Le cas d'une loi du type $y = bx$ n'est pas détaillé ici car la démarche est exactement la même. Les deux types d'ajustement linéaire sont proposés par tous les programmes de traitement de données.

¹⁵En anglais, fit = ajuster, mettre à la bonne dimension.

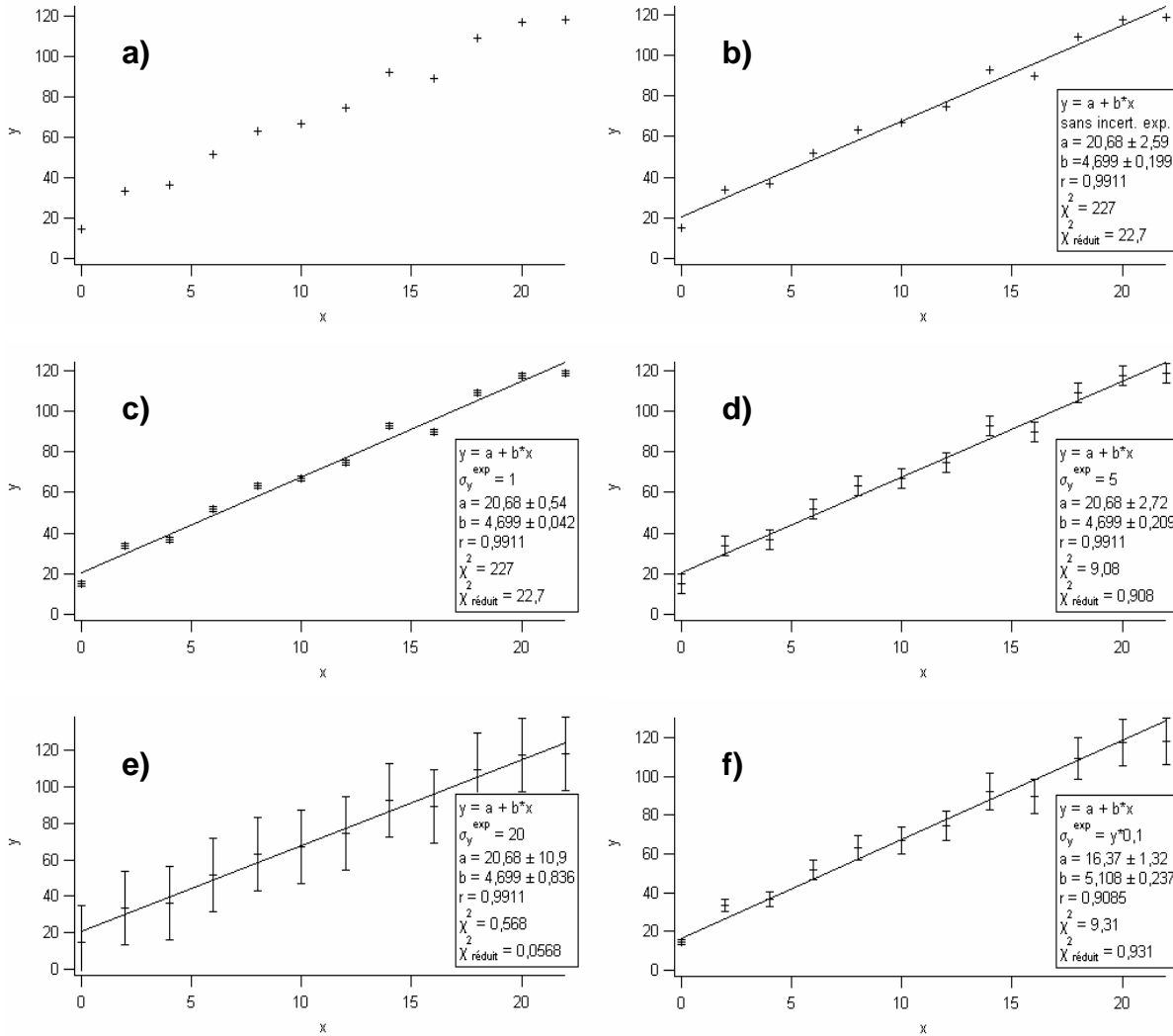
¹⁶- sous Igor : Analysis → Curve Fitting → Fonction = line.

Pour prendre en compte les incertitudes : onglet Data Option → Weighting → nom de la wave dans laquelle on a mis les incertitudes. Laisser par défaut l'option "Standard Dev." (l'autre option sert à la compatibilité avec une ancienne version d'Igor). Attention, la prise en compte des incertitudes est indépendante de l'affichage des barres d'erreur sur le graphe.

- sous Synchronie : Traitement → Modélisation

Synchronie ne permet pas d'afficher les barres d'erreur !

Fig. 3 - Régression linéaire : exemples



3.1.1 Meilleure estimation des paramètres a et b

Deux cas différents se présentent :

a. Cas où toutes les mesures de y ont la même incertitude σ_y^{exp}

C'est en particulier ce qui est supposé implicitement si on n'a pas précisé les incertitudes σ_i^{exp} . La méthode utilisée, appelée *méthode des moindres carrés*, consiste à chercher les valeurs de a et b qui rendent minimum :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2$$

Cette minimisation conduit directement à :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\Delta} \tag{1}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\Delta} \tag{2}$$

où

$$\Delta = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

Note : Ces formules ne sont bien entendues applicables que pour $n > 2$. D'ailleurs, pour $n = 1$ elles donnent des formes indéterminées pour a et b .

La figure 3.b montre les résultats obtenus pour les données du tableau 3 sans avoir précisé les incertitudes sur y . Les figures 3.c, d et e présentent les mêmes données avec des incertitudes respectives $\sigma_y^{exp} = 1$, $\sigma_y^{exp} = 5$ et $\sigma_y^{exp} = 20$. On peut vérifier sur ces 4 figures que les valeurs de a et b obtenues sont identiques (et donc indépendantes de l'incertitude σ_y^{exp}).

b. Cas où toutes les mesures de y ont des incertitudes différentes

On peut généraliser les résultats ci-dessus au cas où on précise pour chaque mesure y_i l'incertitude σ_i^{exp} . On obtient :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2 \sum_{i=1}^n w_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i}{\Delta}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i y_i}{\Delta}$$

où

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right)^2$$

et où le poids $w_i = 1/(\sigma_i^{exp})^2$ de la $i^{\text{ème}}$ mesure est d'autant plus grand que cette mesure est précise.

La figure 3.f présente les résultats obtenus pour les données du tableau 3 avec $\sigma_i^{exp} = y/10$. On constate que les valeurs de a et b sont cette fois-ci différentes de celles obtenues avec des incertitudes identiques.

Le programme de fit fournit également les valeurs des incertitudes σ_a et σ_b sur a et b . Pour cela, il utilise les résultats du paragraphe suivant.

3.1.2 Incertitudes σ_a et σ_b sur les paramètres a et b

Pour évaluer σ_a et σ_b , on utilise les formules 1 et 2 et les techniques de propagation des incertitudes indépendantes décrites au paragraphe 2.2.2.

a. Cas où toutes les mesures de y ont la même incertitude

On obtient alors¹⁷ :

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta}} \quad \text{et} \quad \sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}}$$

où :

¹⁷Remarquer que $\frac{\sigma_a}{\sigma_y}$ et $\frac{\sigma_b}{\sigma_y}$ ne dépendent que des x_i .

- si on a fourni l'incertitude σ_y^{exp} sur les mesures de y

$$\sigma_y = \sigma_y^{exp}$$

On peut ainsi vérifier sur les figures 3.c, d et e que σ_a et σ_b sont proportionnelles à σ_y^{exp} .

- si on n'a pas indiqué d'incertitudes sur les mesures de y

$$\sigma_y = \sigma_y^{stat}$$

où σ_y^{stat} est l'estimation statistique décrite ci-dessous de l'incertitude sur les mesures de y . Comme chaque mesure y_i se distribue autour de la valeur vraie $a + bx_i$ avec la même incertitude σ_y , les écarts $y_i - (a + bx_i)$ se distribuent autour de la valeur nulle avec une incertitude σ_y . **De la répartition des points de mesure autour de la droite d'équation $y = a + bx$, on peut donc remonter à l'incertitude σ_y sur les mesures de y .** On peut montrer que la meilleure estimation de cette incertitude est¹⁸ :

$$\sigma_y^{stat} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2}$$

b. Cas où toutes les mesures de y ont des incertitudes différentes

Les incertitudes sur a et b sont alors données par :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}{\Delta}} \quad \text{et} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\Delta}}$$

3.1.3 Accord de données expérimentales avec une loi linéaire

A partir de l'exemple présenté ci-dessus, on discute ici qualitativement de l'accord entre des données expérimentales (incluant éventuellement leurs incertitudes) et la loi linéaire du type $y = a + bx$ déterminée dans les paragraphes précédents.

Sur la figure 3.d, les incertitudes sont comparables aux écarts à la droite. Les données et leurs incertitudes sont en bon accord avec une loi linéaire¹⁹.

Sur la figure 3.c, les incertitudes sont en moyenne petites par rapport aux écarts à la droite. Les données et leurs incertitudes ne peuvent être modélisées par une loi linéaire²⁰. Soit la loi n'est pas linéaire, soit on a sous-estimé les incertitudes.

Sur la figure 3.e, les incertitudes sont grandes par rapport aux écarts à la droite. Les données et leurs incertitudes peuvent être modélisées par une loi linéaire. Il est cependant probable qu'on a surestimé les incertitudes.

¹⁸Voir *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Paragraphe 8.3, p. 174, J.R. Taylor, Editions Dunod, 2000.

¹⁹Attention, ce n'est pas une preuve de linéarité, c'est juste une compatibilité.

²⁰Paradoxalement, c'est dans ce cas que les incertitudes sur a et b sont les plus faibles. On ne peut donc pas tirer de ces incertitudes un critère de validité de la loi.

Comme on n'a pas précisé les incertitudes, le cas présenté figure 3.b ne permet pas de valider la loi linéaire. Par contre, si on admet cette loi, on a l'incertitude statistique sur a et b .

En conclusion : au niveau de l'agrégation, la discussion qualitative ci-dessus suffit. Le paragraphe 3.1.5 propose néanmoins une version quantitative de cette discussion.

3.1.4 Coefficient de corrélation linéaire

Dans tous les cas, le programme de fit donne la valeur du coefficient de corrélation linéaire ^{21,22} :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X)(y_i - Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - X)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - Y)^2}}$$

où X et Y sont respectivement les moyennes des x_i et des y_i .

$r = 0$ pour un grand nombre de points répartis au hasard et $r = 1$ pour des points parfaitement alignés. r est un outil utilisé par les statisticiens qui reflète la tendance à la linéarité. En pratique, à l'agrégation, quand on fait une régression linéaire, on trouve toujours r très voisin de 1. Ce n'est pas ici un outil efficace pour discuter de la validité d'une loi linéaire.

3.1.5 Le χ^2

On définit le paramètre χ^2 par ²³ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (a + bx_i))^2}{(\sigma_i^{exp})^2}$$

Dans le cas où tous les σ_i sont égaux, c'est la somme des carrés des écarts à la droite divisée par le carré de l'incertitude sur y ^{24, 25}.

On définit ensuite le χ^2 réduit :

$$\chi_{réduit}^2 = \frac{\chi^2}{n - 2}$$

$n - 2$ est le nombre de degrés de liberté du problème, égal au nombre de points mesurés moins le nombre de paramètres déterminés (ici a et b)²⁶. Dans le cas où toutes les incertitudes sont égales, il est facile d'établir que :

$$\chi_{réduit}^2 = \left(\frac{\sigma_y^{stat}}{\sigma_y^{exp}} \right)^2$$

où σ_y^{stat} est l'incertitude statistique évalué par le logiciel (cf.3.1.2).

Le $\chi_{réduit}^2$ fournit un bon critère quantitatif pour décider si des données et leurs incertitudes s'accordent avec une loi linéaire :

²¹La formule donnée ci-dessous est valable lorsque tous les y ont la même incertitude.

²²Sous Igor, il est donné par la variable V_Pr . Sous Synchronie, c'est r .

²³Sous Igor, il est donné par la variable V_chisq (pour "chisquare").

²⁴De manière générale, les paramètres a et b donnés par la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent le χ^2 .

²⁵Sur les figures 3.c, d et e, on peut vérifier que le χ^2 est inversement proportionnel au carré de l'incertitude σ_y^{exp} .

²⁶Dans le cas d'un ajustement par une loi du type $y = bx$, on a $\chi_{réduit}^2 = \chi^2 / (n - 1)$

- Les données expérimentales sont en bon accord avec une loi linéaire si $\chi_{réduit}^2$ est de l'ordre de 1. C'est le cas de la figure 3.d.
- Dans le cas de la figure 3.c, $\chi_{réduit}^2 \gg 1$ donc $\sigma_y^{stat} \gg \sigma_y^{exp}$. La loi n'est pas validée ou σ_y^{exp} a été sous-estimé.
- Le cas $\chi_{réduit}^2 \ll 1$ correspond à la figure 3.e. Les données peuvent être modélisées par une loi linéaire. Il est cependant probable qu'on a surestimé les incertitudes.

Remarque : certains logiciels, comme Igor, renvoient quand même une valeur de χ^2 même si on ne leur a pas fourni les incertitudes σ_i^{exp} (voir figure 3.b). Cette valeur est calculée en prenant $\sigma_i^{exp} = 1$. On ne peut alors pas tirer grand chose du $\chi_{réduit}^2$ si ce n'est la valeur de σ_y^{stat} (on a alors $\chi_{réduit}^2 = (\sigma_y^{stat})^2$).

3.2 Cas général d'un ajustement par une loi $y = f(x)$

Les principes développés dans le cas de la régression linéaire s'appliquent encore dans le cas d'un ajustement par une fonction quelconque $y = f(x)$, dépendant d'un certain nombre de paramètres. Les logiciels d'ajustement déterminent numériquement les valeurs des paramètres qui minimisent le χ^2 .

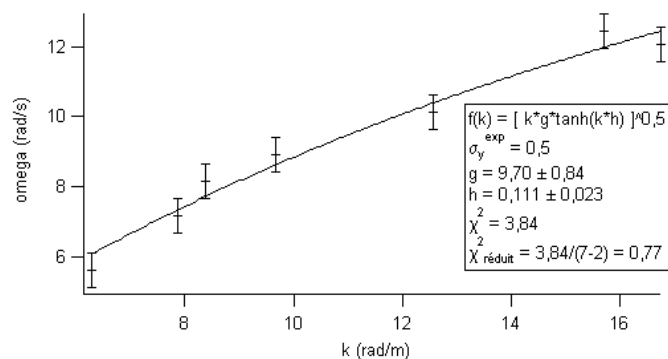
Remarque : Contrairement au cas linéaire, il faut ici donner des valeurs initiales aux paramètres de la fonction. Ceci doit être fait avec une précision suffisante pour que la procédure de minimisation converge.

En cas d'échec de la procédure :

- contrôler que le fit est fait sur les bonnes variables en ordonnée et abscisse.
- penser à tenir compte d'éventuels décalages sur x et y . Par exemple, au lieu de la fonction $y = ax^b$, il peut être judicieux d'utiliser $y = a(x - c)^b + d$.
- améliorer les valeurs initiales des paramètres. Pour cela, tracer la fonction avec les paramètres initiaux sans opération d'ajustement jusqu'à obtenir un accord visuel suffisant.
- on peut essayer de bloquer provisoirement la valeur de certains paramètres, de procéder à l'ajustement, puis de libérer un à un les paramètres bloqués.
- réduire la plage des données qu'on cherche à fitter en effectuant une sélection sur la courbe.

Fig. 4 - Relation de dispersion des ondes de gravité

A titre d'exemple, la figure 4 présente la relation de dispersion $\omega(k)$ mesurée pour des ondes de gravité dans une cuve d'eau de profondeur h et son ajustement par la fonction non-linéaire attendue $f(k) = (k * g * \tanh(k * h))^{1/2}$ (g est l'intensité du champ de pesanteur).



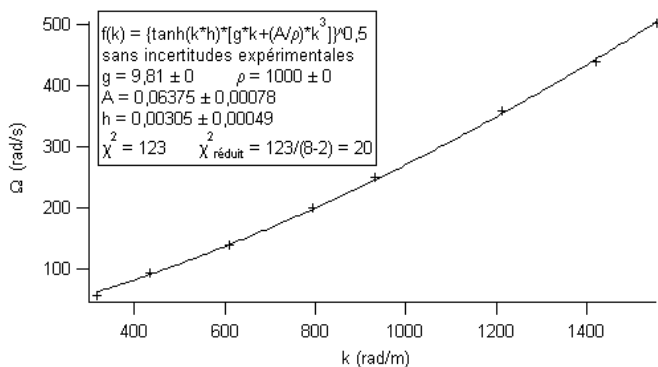
Visuellement, on constate que les données et les incertitudes qui leur sont associées sont en accord avec la loi proposée. On obtient une détermination des paramètres g et h avec leurs incertitudes. Par ailleurs, le logiciel évalue le χ^2 . On peut en déduire le $\chi_{réduit}^2$ (on a 7 points de mesures et 2 paramètres

à déterminer donc 5 degrés de liberté), qui confirme quantitativement l'analyse visuelle.

De manière similaire, la figure 5 présente la relation de dispersion des ondes à la surface de l'eau dans le régime intermédiaire entre le régime capillaire et le régime de gravité. On a réalisé un ajustement par la fonction $f(k) = ((k * g + (A/\rho) * k^3) * \tanh(k * h))^{1/2}$ (A et ρ sont respectivement la tension superficielle et la masse volumique de l'eau). On a choisi de bloquer les paramètres g et ρ pour 2 raisons différentes :

- dans le régime étudié, la fonction $f(k)$ est très peu sensible au paramètre g qui serait, si on le laissait libre, déterminé avec une grande incertitude.
- la fonction f ne dépend en fait que de 3 paramètres g , h et A/ρ . Pour déterminer A , on a supposé ρ connu.

Fig. 5 - Relation de dispersion des ondes à la surface de l'eau



Ici, on n'a pas rentré d'incertitude expérimentale σ_y^{exp} . On ne peut pas savoir si la loi est validée. Cependant, si on admet cette loi, on a une mesure des paramètres h et A avec leurs incertitudes déduites de la répartition statistique des points autour de la courbe.

Annexe : Rappels élémentaires de statistique

A.1 Distribution de probabilité d'une grandeur aléatoire

On appelle distribution de probabilité d'une grandeur aléatoire x ²⁷ à valeurs continues la fonction $f(x)$ telle que la probabilité pour que x soit comprise entre a et b s'écrive :

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ est donc une densité de probabilité : $f(x)dx$ est la probabilité que la variable aléatoire x prenne une valeur comprise entre x et $x + dx$. On en déduit les deux propriétés suivantes :

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

A.2 Valeur moyenne et écart-type

La valeur moyenne (ou espérance) X d'une grandeur aléatoire x à valeur continue est donnée par :

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

L'écart-type σ de la distribution des valeurs de X est défini par :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X)^2 f(x)dx$$

C'est une mesure de la dispersion des valeurs de x autour de sa valeur moyenne. Plus les valeurs de x se concentrent autour de la moyenne, plus l'écart-type est faible. σ^2 est appelée variance de la distribution.

Cas d'une distribution de probabilité discrète : Si la grandeur aléatoire ne prend que des valeurs discrètes x_i avec des probabilités respectives p_i , la valeur moyenne et l'écart-type de la distribution sont respectivement donnés par : $X = \sum_i x_i p_i$ et $\sigma = \sqrt{\sum_i (x_i - X)^2 p_i}$

A.3 Exemples de distributions de probabilité

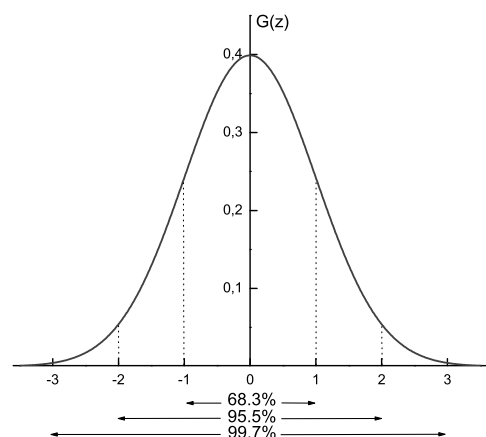
– La distribution de Gauss ou Loi Normale

La distribution de Gauss, de valeur moyenne X et d'écart-type σ s'écrit :

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}$$

²⁷Pour simplifier les notations, on désigne par la même lettre x la variable aléatoire et sa valeur.

Fig. 6 - La distribution de Gauss ou Loi Normale : c'est une distribution symétrique autour de la moyenne dont le graphe est présenté ci-contre en fonction de $z = (x - X)/\sigma$. Comme indiqué sur la figure et dans le tableau 4, la probabilité que la valeur de x soit à moins d'un écart-type de la moyenne (en valeur absolue) est de 68 %. Cette probabilité passe à 99.7 % pour un écart à la moyenne de 3 écarts-types. L'importance physique de la distribution gaussienne est discutée au paragraphe A.4



α	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
P(%)	0	38	68	87	95,4	98,8	99,7	99,95	99,99

Tab. 4 - Loi Normale : probabilité P qu'une mesure de x se trouve dans l'intervalle $[X - \alpha\sigma, X + \alpha\sigma]$

– **La distribution binômiale**

On réalise n fois une expérience n'ayant que deux résultats possibles, l'un de probabilité p , l'autre de probabilité $1 - p$. La probabilité d'obtenir k fois le résultat de probabilité p est donnée par la distribution binômiale :

$$B_{n,p}(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Cette distribution de probabilité, définie uniquement pour les valeurs entières k pour moyenne np et pour écart-type $\sqrt{np(1 - p)}$. Elle n'est pas symétrique autour de sa moyenne. Néanmoins, si n est grand et si les probabilités p et $1 - p$ ne sont pas trop voisines de 0, la loi normale de moyenne np et d'écart-type $\sqrt{np(1 - p)}$ est une très bonne approximation de la distribution binômiale. Dans la pratique, cette approximation est très convenable dès que np et $n(1 - p)$ sont tous deux supérieurs à 5. ²⁸

– **La distribution de Poisson**

On la rencontre dans des situations où des évènements rares et indépendants se produisent aléatoirement dans le temps avec une probabilité par unité de temps connue. Si les évènements sont indépendants les uns des autres, le nombre n d'évènements qui se produisent pendant une durée fixe est une grandeur aléatoire dont la distribution de probabilité est la loi de Poisson :

$$P_N(n) = e^{-N} \frac{N^n}{n!}$$

N est le nombre moyen d'évènements observés.

On rencontre par exemple la distribution de Poisson lorsqu'on compte, pendant un temps donné, un nombre de désexcitations radioactives, ou le nombre de photons d'un faisceau laser. Elle décrit également le nombre de molécules se trouvant à l'intérieur d'un petit volume de gaz parfait.

La distribution de Poisson n'est pas symétrique autour de sa moyenne. Une de ses particularités est qu'elle ne dépend que d'un paramètre. Son écart-type est directement relié à sa moyenne par $\sigma = \sqrt{N}$.

²⁸Pour une analyse plus détaillée de cette approximation voir : *Physique Statistique*, complément I.C, p.62, B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, éditions Hermann, 1995.

La distribution de Poisson de valeur moyenne $N = np$ est une très bonne approximation de la distribution binômiale $B_{n,p}$, lorsqu'on compte beaucoup d'évènements rares, c'est à dire pour les grandes valeurs de n et les faibles valeurs de p (dans la pratique pour $n > 50$ et $N < 5$). Comme la loi binômiale, la distribution de Poisson est très proche d'une Gaussienne dès que le nombre d'évènements observés est grand.

A.4 Importance physique de la Loi Normale

Dans la pratique, si on répète un grand nombre de fois une mesure physique, on obtient le plus souvent pour les résultats de la mesure une distribution de probabilité gaussienne. On peut en fait démontrer ce résultat pour toutes les mesures sujettes à des erreurs systématiques négligeables mais à de nombreuses sources d'erreurs aléatoires indépendantes (la version mathématique de ce théorème est appelée Théorème Centrale Limite) ²⁹.

²⁹On trouvera une illustration physique simple de ce théorème dans : *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques*, Paragraphe 10.5, p. 235, J.R. Taylor, Editions Dunod, 2000.