

# Couplage fort de deux oscillateurs

En plaçant de la matière dans une cavité optique, on peut obtenir un système composite cavité-matière aux propriétés nouvelles, si la matière présente une résonance à une pulsation égale à une pulsation de résonance de la cavité, et si ces deux résonances ont des coefficients d'amortissement faibles devant le coefficient de couplage entre ces systèmes. Un tel phénomène de *couplage fort* a été mis en évidence pour des atomes en cavité au début des années 1980, puis dans des hétérostructures de matériaux semi-conducteurs au début des années 1990.

Le problème comporte trois parties très largement indépendantes.

La première partie donne une description purement classique de deux oscillateurs harmoniques, de même pulsation de résonance  $\omega_0$ , et couplés linéairement ; le coefficient de couplage, homogène à une pulsation, est noté  $\Omega_1$ . Ces oscillateurs sont faiblement amortis : on caractérise chaque oscillateur par son coefficient d'amortissement  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$ , également homogène à une pulsation. On considère dans tout le problème que  $\Omega_1$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont *très petits* devant la pulsation de résonance  $\omega_0$ . L'objet du problème est d'étudier comment la dynamique du système est modifiée suivant l'importance relative des effets de couplage ( $\Omega_1$ ) et d'amortissement ( $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ) : on distingue ainsi un régime de *couplage fort* et un régime de *couplage faible*.

On considère dans les deux parties suivantes deux oscillateurs de natures physiques différentes : un mode du champ électromagnétique dans une cavité, et une résonance du milieu matériel présent dans la cavité. On décrit dans la deuxième partie le couplage lumière-matière dans le cadre de l'optique classique, en examinant comment les propriétés de dispersion et d'absorption du milieu modifient la fonction de transmission de la cavité optique.

La troisième partie propose une description quantique du système le plus simple : un seul atome, assimilé à un système à deux niveaux, couplé à un mode discret du champ électromagnétique de la cavité, contenant 0 ou 1 photon.

Pour alléger les calculs, on se place dans tout le problème dans le cas résonnant : les deux oscillateurs ont exactement la même pulsation de résonance, notée  $\omega_0$ . Les coefficients d'amortissement sont définis par rapport à l'énergie. Si on considère une excitation harmonique de pulsation  $\omega$ , on notera  $\Delta$  le décalage en pulsation  $\Delta = \omega - \omega_0$ .

## Relations mathématiques utiles :

"Fonction"  $\delta$  de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega t) d\omega = 2\pi\delta(t) \quad (1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad \text{si } t_0 \in ]t_1, t_2[$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = 0 \quad \text{si } t_0 \notin [t_1, t_2]$$

On admettra que dans le cadre des calculs demandés dans ce problème, on peut écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t - t_0)dt = \frac{f(t_0)}{2} \quad \text{si } t_0 = t_1 \text{ ou } t_0 = t_2 \quad (2)$$

Transformée de Fourier d'une lorentzienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{a})^2} \exp(-j\omega t) d\omega = \pi a \exp(-a|t|) \quad (a > 0) \quad (3)$$

## Conventions d'écriture :

On note  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ . Les candidats pourront, à leur convenance, noter les grandeurs complexes  $\tilde{A}$  ou  $\underline{A}$ . On note  $\Re[ \ ]$  la partie réelle et  $\Im[ \ ]$  la partie imaginaire de la quantité entre crochets.

## Notations utilisées dans le problème :

### Constantes fondamentales :

$e$	charge élémentaire	.....	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
$m$	masse de l'électron	.....	$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$c$	vitesse de la lumière dans le vide	.....	$c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
$\epsilon_0$	permittivité diélectrique du vide	.....	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
$\hbar$	constante de Planck réduite	.....	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

### Première partie :

$L$  inductance

$\Omega_1$  coefficient de couplage

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  coefficient d'amortissement du circuit résonnant 1 ou 2

$\tilde{\omega}$  pulsation complexe

$\omega_+$  et  $\omega_-$  pulsations des modes propres

$\gamma_+$  et  $\gamma_-$  coefficients d'amortissement des modes propres  
 $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  décalages des pics de résonance des circuits couplés par rapport à  $\omega_0$

### Deuxième partie :

$L$  longueur de la cavité  
 $n_B$  indice constant du milieu sans oscillateurs  
 $r$  et  $t$  coefficients de réflexion et de transmission en amplitude d'un miroir  
 $R$  et  $T$  coefficients de réflexion et de transmission en énergie d'un miroir  
 $T_C^{sans}(\omega)$  transmission de la cavité sans oscillateurs  
 $T_C^{max}$  transmission maximale de la cavité sans oscillateurs  
 $\Delta_{ISL}$  intervalle en pulsation entre deux résonances consécutives de la cavité seule  
 $\varepsilon(\omega)$  désaccord de phase  
 $\gamma_C$  largeur à mi-hauteur des pics de transmission de la cavité seule  
 $F$  Finesse de la cavité Fabry-Perot  
 $\tau$  temps d'un aller-retour de la lumière dans la cavité  
 $\gamma$  coefficient d'amortissement de l'énergie du mode de la cavité seule  
 $\tilde{\epsilon}_r$  permittivité diélectrique relative  
 $\epsilon_{rB} = n_B^2$   
 $\tilde{\chi}(\omega)$  susceptibilité diélectrique des oscillateurs de Lorentz  
 $\omega_0$  pulsation de résonance des oscillateurs de Lorentz  
 $\gamma_A$  coefficient d'amortissement des oscillateurs de Lorentz  
 $N$  nombre d'oscillateurs de Lorentz par unité de volume  
 $\omega_p$  pulsation plasma  
 $\epsilon_0$  permittivité diélectrique du vide  
 $\alpha(\omega)$  coefficient d'absorption des oscillateurs de Lorentz  
 $n(\omega)$  indice du milieu contenant les oscillateurs de Lorentz  
 $\alpha_0 = \alpha(\omega = \omega_0)$   
 $\beta$  paramètre de couplage  
 $T_C^{avec}(\omega)$  transmission de la cavité contenant les oscillateurs de Lorentz  
 $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  décalages des pics de transmission de la cavité contenant les oscillateurs de Lorentz par rapport à  $\omega_0$   
 $\Omega = \Delta_+ - \Delta_-$ , écart entre ces deux pics de transmission  
 $\gamma_{AC}$  largeur à mi-hauteur des pics de transmission de la cavité contenant les oscillateurs  
 $t_C(\omega)$  coefficient de transmission en amplitude de la cavité

### Troisième partie :

$v = \hbar\Omega_1/2$  : énergie de couplage entre deux états quantiques  
 $\rho_0$  densité d'états (uniforme) en énergie  
 $\Gamma$  probabilité de transition par unité de temps de l'état discret vers le continuum, donnée par la règle d'or de Fermi  
 $\hbar\gamma$  largeur à mi-hauteur de la densité d'états en énergie  $\rho(\hbar\omega)$

## Première partie

# Circuits électriques couplés

## 1 Equations différentielles couplées

On considère deux circuits RLC série représentés sur la Figure 1, couplés par une mutuelle inductance  $M$ . Afin d'alléger les calculs, on considère que les circuits 1 et 2 comportent des capacités  $C$  égales, des inductances  $L$  égales, mais des résistances  $R_1$  et  $R_2$  en général différentes. On note  $e(t)$  la tension d'excitation éventuellement imposée en série au circuit 1 et  $u(t)$  la tension de sortie aux bornes de la résistance  $R_2$  du circuit 2. On note  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  les courants parcourant les deux circuits, les orientations étant précisées sur la Fig. 1. On suppose que le sens des enroulements est tel que  $M > 0$ .

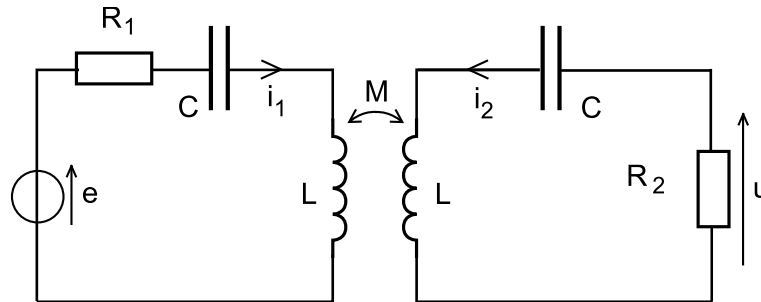


FIG. 1 – Deux circuits RLC couplés par mutuelle induction

1. Établir le système d'équations différentielles reliant  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et  $e(t)$ .
2. Montrer que ces relations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 i_1 / dt^2 \\ d^2 i_2 / dt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_1 / dt \\ di_2 / dt \end{pmatrix} + 1/C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} de/dt \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3. Les trois matrices caractérisent respectivement le terme inductif, le terme dissipatif et le terme capacitif.
  - (a) À quelle condition sur ces trois matrices peut-on définir des variables qui permettent de découpler les équations (4) ?
  - (b) Cela est-il toujours possible ?
4. On suppose, dans cette question uniquement, que  $R_1 = R_2 = R$ .
  - (a) En examinant la symétrie des équations différentielles couplées liant  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et  $e(t)$ , montrer qu'il existe, dans ce cas particulier où les résistances sont égales, deux combinaisons linéaires simples de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  qui permettent d'obtenir des équations différentielles découplées.
  - (b) Expliquer en quoi ces combinaisons définissent des *modes propres* du système couplé.

## 2 Analyse du régime harmonique forcé

On suppose que la tension excitatrice est de la forme  $e(t) = \Re[\tilde{E} \exp(j\omega t)]$ . On cherche les courants sous la forme :  $i_1(t) = \Re[\tilde{I}_1 \exp(j\omega t)]$ ;  $i_2(t) = \Re[\tilde{I}_2 \exp(j\omega t)]$ .  $\tilde{I}_1 = I_{10} \exp(j\varphi_1)$  et  $\tilde{I}_2 = I_{20} \exp(j\varphi_2)$  sont les amplitudes complexes des courants.

L'excitation  $e(t)$  est appliquée au niveau du circuit 1. On s'intéresse à la réponse au niveau du circuit 2, qui est de la forme  $u(t) = \Re[\tilde{U} \exp(j\omega t)]$ . On définit donc la fonction de transfert du montage par  $\tilde{H}(\omega) = \tilde{U} / \tilde{E}$ .

## 2.1 Comportement au voisinage de la résonance

5. Montrer que les amplitudes complexes des courants vérifient une équation matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - j\omega\gamma_1 - \omega_0^2 & \omega^2\Omega_1/\omega_0 \\ \omega^2\Omega_1/\omega_0 & \omega^2 - j\omega\gamma_2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = -\frac{j\omega}{L} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer les coefficients  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega_1$  en fonction des données du problème. On remarquera que le coefficient de couplage  $\Omega_1$  est bien positif avec les conventions d'orientation des circuits choisies.

6. On s'intéresse à des pulsations au voisinage de  $\omega_0$ . On note  $\Delta = \omega - \omega_0$  le décalage entre la pulsation  $\omega$  et la pulsation  $\omega_0$ . En utilisant l'hypothèse  $|\Delta/\omega_0| \ll 1$ , montrer que l'équation matricielle prend la forme simplifiée suivante :

$$\begin{pmatrix} 2\Delta - j\gamma_1 & \Omega_1 \\ \Omega_1 & 2\Delta - j\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = -\frac{j}{L} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

## 2.2 Fonction de transfert

7. En partant de la relation matricielle (5), établir l'expression de la fonction de transfert  $\tilde{H}(\omega)$  au voisinage de  $\omega_0$ .
8. Exprimer le module de cette fonction de transfert  $|\tilde{H}(\Delta)|$  en fonction de  $\Omega_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\Delta$ .
9. (a) En déduire l'expression de  $|\tilde{H}(\Delta = 0)|$ , le module de la fonction de transfert en  $\Delta = 0$ .
- (b) On s'intéresse ici aux variations de  $|\tilde{H}(\Delta = 0)|$  avec le coefficient de couplage  $\Omega_1$ . Montrer que  $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|$  est une fonction croissante puis décroissante de  $\Omega_1$ . On notera  $\Omega_{c2}$  la valeur de  $\Omega_1$  pour laquelle  $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1)|$  est maximale. Exprimer  $\Omega_{c2}$  en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .
- (c) Calculer  $|\tilde{H}(\Delta = 0, \Omega_1 = \Omega_{c2})|$ .
10. On considère à présent les variations de  $|\tilde{H}(\Delta)|$  avec le décalage  $\Delta$ . Rechercher les extrema de  $|\tilde{H}(\Delta)|$ . Montrer que pour un couplage supérieur à un couplage  $\Omega_{c3}$ , le module de la fonction de transfert possède deux maxima en  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$ . Exprimer  $\Omega_{c3}$  en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Exprimer  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  en fonction de  $\Omega_1$  et  $\Omega_{c3}$ .
11. Représenter sur un même graphique l'allure du module de la fonction de transfert  $|\tilde{H}(\Delta)|$  pour différentes valeurs du couplage :  $\Omega_1 < \Omega_{c2}$  ;  $\Omega_{c2} < \Omega_1 < \Omega_{c3}$  ;  $\Omega_1 > \Omega_{c3}$ .
12. On se place dans le cas où le couplage  $\Omega_1$  est grand devant  $\Omega_{c3}$  ( $\Omega_1 \gg \Omega_{c3}$ ).
- (a) Montrer que la hauteur des pics de la fonction de transfert  $|\tilde{H}(\Delta)|$  est alors constante ; donner son expression en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .
- (b) Donner la largeur à -3 dB des pics de  $|\tilde{H}(\Delta)|$  en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

## 2.3 Filtres à résonateurs couplés

Les exigences de miniaturisation et d'économie énergétique des téléphones mobiles nécessitent le remplacement de certains composants discrets par des homologues intégrés sur silicium. Des résonateurs micro-mécaniques sont ainsi développés pour la réalisation de filtres passe-bande de *fréquences intermédiaires* (entre celles du signal hyperfréquence reçu et celles

du domaine audible). Pour réaliser un filtre d'ordre supérieur à deux, l'approche courante est de coupler deux résonateurs. On cherche à obtenir la bande passante la plus plate possible, c'est à dire avec une variation de transmission aussi faible que possible au voisinage de la résonance. Ce filtre étant l'analogue du circuit électrique couplé présenté ci-dessus, les résultats obtenus sur la fonction de transfert sont directement utilisables.

13. Montrer que pour obtenir la bande passante la plus plate possible, il faut choisir  $\Omega_1 = \Omega_{c3}$ .
14. On a vu précédemment que le module de la fonction de transfert en  $\Delta = 0$  est maximal pour  $\Omega_1 = \Omega_{c2}$ . En déduire que ces deux conditions sont simultanément satisfaites si les deux résonateurs ont le même coefficient d'amortissement qu'on notera  $\gamma$ .
15. Dans ces conditions optimales, quel est le lien entre le coefficient de couplage  $\Omega_1$  et le coefficient d'amortissement  $\gamma$ ?
16. Donner la valeur de la bande passante à -3 dB du filtre ainsi optimisé.
17. Application numérique : On veut obtenir une bande passante en fréquence à -3 dB de 140 kHz centrée à  $\omega_0/(2\pi) = 100$  MHz. Quelles valeurs faut-il choisir pour  $\gamma/(2\pi)$  et  $\Omega_1/(2\pi)$  ?

### 3 Analyse en régime libre

#### 3.1 Recherche des modes propres approchés

On suppose ici que  $e(t) = 0$  pour  $t > 0$ . On cherche une solution particulière pour  $t > 0$  sous la forme  $i_1(t) = \Re[\tilde{I}_1 \exp(j\tilde{\omega}t)]$ ;  $i_2(t) = \Re[\tilde{I}_2 \exp(j\tilde{\omega}t)]$ . Les quantités  $\tilde{I}_1 = I_{10} \exp(j\varphi_1)$  et  $\tilde{I}_2 = I_{20} \exp(j\varphi_2)$  sont les amplitudes complexes des courants.  $\tilde{\omega}$  est une pulsation complexe qu'on écrira sous la forme

$$\tilde{\omega} = \omega + j\frac{\gamma}{2}$$

18. Préciser la signification physique et le signe de  $\omega = \Re[\tilde{\omega}]$  et de  $\gamma = 2\Im[\tilde{\omega}]$ .
19. Montrer que  $\tilde{\Delta} = \tilde{\omega} - \omega_0$  vérifie l'équation algébrique :

$$4\tilde{\Delta}^2 - 2j(\gamma_1 + \gamma_2)\tilde{\Delta} - \gamma_1\gamma_2 - \Omega_1^2 = 0 \quad (6)$$

20. En déduire l'expression des pulsations complexes  $\tilde{\omega}_+$  et  $\tilde{\omega}_-$  caractérisant les deux modes propres, dans chacun des cas suivants :
  - (a) Couplage faible :  $\Omega_1 < \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$ . Montrer que les deux pulsations propres  $\omega_{\pm}$  sont égales, mais que les coefficients d'amortissement  $\gamma_{\pm}$  sont différents.
  - (b) Couplage fort :  $\Omega_1 > \Omega_{c1} = |\gamma_1 - \gamma_2|/2$ . Montrer que les deux pulsations propres  $\omega_{\pm}$  sont différentes, mais que les coefficients d'amortissement  $\gamma_{\pm}$  sont identiques. On notera  $\gamma$  leur valeur commune. On notera  $\tilde{\omega}_+$  la pulsation complexe dont la partie réelle est la plus grande.
21. Représenter sur un graphique les pulsations  $\omega_{\pm}$  des modes approchés en fonction de la valeur du coefficient de couplage  $\Omega_1$ .
22. Représenter de même les variations des coefficients d'amortissement  $\gamma_{\pm}$  de ces modes approchés en fonction de  $\Omega_1$ .

### 3.2 Evolution temporelle en couplage fort

On se place pour la fin de cette première partie dans le cas du couplage fort.

23. Donner l'expression générale de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , en fonction des paramètres  $\gamma$ ,  $\omega_+$  et  $\omega_-$ .
24. On considère la situation où initialement un seul des deux modes propres est excité. Montrer que les deux courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sont dans une relation d'amplitude et de phase bien précise qu'on explicitera
  - (a) dans le cas du mode propre de pulsation  $\omega_+$ ,
  - (b) dans le cas du mode propre de pulsation  $\omega_-$ .
25. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$  on a

$$i_1(0) = i_0 \quad i_2(0) = 0 \quad \frac{di_1}{dt}(0) = 0 \quad \frac{di_2}{dt}(0) = 0$$

Donner l'expression de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  en fonction des paramètres  $i_0$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_+$  et  $\omega_-$  puis en fonction de  $i_0$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega_1$ .

26. Représenter qualitativement l'évolution de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sur un même graphique.
27. Interpréter cette évolution en terme de modes propres.
  - (a) Au bout de combien de temps l'énergie est-elle entièrement passée du circuit 1 au circuit 2 ?
  - (b) Au bout de combien de temps est-elle entièrement revenue au circuit 1 ?

### 3.3 Préparation du système dans un état déterminé

On suppose qu'on puisse faire varier la valeur de la mutuelle inductance de couplage d'une valeur nulle à la valeur  $M$  puis à nouveau à une valeur nulle. À partir d'une situation de couplage nul, on est ainsi capable de "brancher" le couplage  $\Omega_1$  pendant une durée déterminée, puis de revenir dans une situation de couplage nul.

28. On suppose qu'au départ seul le circuit 1 oscille. Quelle durée minimale de couplage faut-il choisir pour obtenir, après retour à la situation de couplage nul :
  - (a) un transfert de toute l'énergie du circuit 1 au circuit 2 ?
  - (b) des oscillations d'amplitudes égales dans les deux circuits 1 et 2 ?

## Deuxième partie

# Couplage fort lumière-matière en cavité

Dans cette partie, on considère un interféromètre de Fabry-Perot contenant un milieu matériel qui présente une résonance à la pulsation  $\omega_0$ . Il peut s'agir soit d'un jet atomique traversant la cavité optique (Fig. 2.a), soit d'une hétérostructure de matériaux semi-conducteurs (Fig. 2.b). On examine de quelle manière la présence de ce milieu matériel modifie la transmission de la cavité lorsqu'une des pulsations de résonance de la cavité est ajustée à  $\omega_0$ .

On étudie d'abord séparément un mode du champ électromagnétique dans la cavité en l'absence de cette résonance du milieu. On définira le coefficient d'atténuation  $\gamma_C$  (C pour "cavité") de ce mode par la largeur des pics de transmission  $T_C^{sans}(\omega)$ . On reliera ensuite  $\gamma_C$  à l'amortissement du mode du champ électromagnétique dans la cavité, dû aux pertes vers les modes extérieurs à la cavité.

On décrit ensuite la résonance du milieu matériel dans le cadre du modèle classique de l'oscillateur de Lorentz, avec un coefficient d'amortissement phénoménologique  $\gamma_A$  (A pour "atome"). On fait apparaître le lien entre absorption et dispersion au voisinage de la résonance.

On examine enfin l'influence de ces oscillateurs de Lorentz placés dans la cavité sur le facteur de transmission  $T_C^{avec}(\omega)$  de cette cavité, ou sur l'évolution temporelle de l'intensité en sortie de cavité après excitation brève. On supposera le faisceau laser de faible intensité.

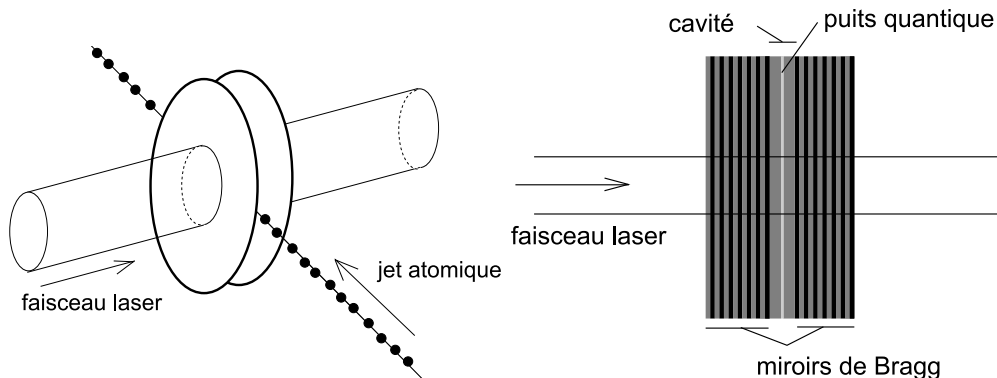


FIG. 2 – a) Cavité optique traversée par un jet atomique présentant une transition atomique résonnante avec la cavité. La longueur de la cavité est  $L = 10$  mm. b) Hétérostructure de matériaux semi-conducteurs. La géométrie du "puits quantique" définit la pulsation de résonance du milieu matériel. La cavité optique a une longueur optique effective de l'ordre de  $\lambda$ , longueur d'onde de la résonance ( $L \sim 1 \mu\text{m}$ ). L'alternance de matériaux d'épaisseur optique  $\lambda/4$  permet de réaliser des miroirs de coefficient de réflexion élevé.

## 1 Caractéristiques de la cavité sans oscillateurs

### 1.1 Accord de phase et finesse

On considère une cavité Fabry-Perot plane constituée par les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ , séparés par la distance  $L$  (Fig. 3). Cet espace contient un milieu d'indice "de base"



constant  $n_B$ . Pour simplifier les calculs on suppose que le même milieu d'indice  $n_B$  est également présent de part et d'autre de la cavité.

Les coefficients de réflexion en amplitude du miroir  $M_1$  sont  $r_1$  du coté intra-cavité et  $-r_1$  du coté externe ; les coefficients de transmission en amplitude sont  $t_1$  pour l'onde entrante et  $t'_1$  pour l'onde sortante de la cavité. Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont respectivement notés  $R_1$  et  $T_1$ . On a de même  $r_2$ ,  $-r_2$ ,  $t_2$ ,  $t'_2$ ,  $R_2$  et  $T_2$  pour le miroir  $M_2$ .  $R_1$  et  $R_2$  sont très proches de 1. On supposera  $r_1$  et  $r_2$  réels.

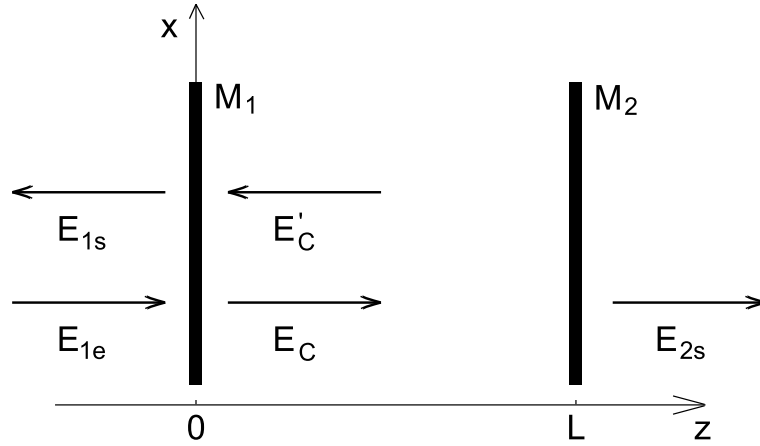


FIG. 3 – Cavité optique Fabry-Perot en régime permanent. Les flèches indiquent le sens de propagation des ondes. Les champs électriques sont dirigés suivant l'axe  $Ox$ .

29. Rappeler l'expression du déphasage  $\Phi(\omega)$  associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité.
30. On envoie sur la cavité une onde incidente de la forme  $\tilde{E}_{1e}(z, t) = \tilde{A}_{1e} \exp[j(kz - \omega t)]$ . Le champ dans la cavité est la superposition d'une onde progressive  $\tilde{E}_C(z, t) = \tilde{A}_C \exp[j(kz - \omega t)]$  et d'une onde progressive de direction opposée  $\tilde{E}'_C(z, t) = \tilde{A}'_C \exp[j(-kz - \omega t)]$ . Il existe également une onde réfléchie par la cavité  $\tilde{E}_{1s}(z, t) = \tilde{A}_{1s} \exp[j(-kz - \omega t)]$  et une onde transmise  $\tilde{E}_{2s}(z, t) = \tilde{A}_{2s} \exp[j(kz - \omega t)]$  (voir Fig. 3).
  - (a) On considère les amplitudes des champs dans le plan  $z = 0$ . Donner les relations liant les amplitudes  $\tilde{A}_C$  et  $\tilde{A}_{1s}$  aux amplitudes  $\tilde{A}_{1e}$  et  $\tilde{A}'_C$ , et faisant intervenir des coefficients caractérisant le miroir  $M_1$ .
  - (b) Donner l'amplitude  $\tilde{A}'_C$  en fonction de  $\tilde{A}_C$ , des coefficients caractérisant le miroir  $M_2$  et du déphasage  $\Phi(\omega)$ .
  - (c) Donner l'amplitude  $\tilde{A}_{2s}$  en fonction de  $\tilde{A}_C$  et des caractéristiques du miroir  $M_2$ .
  - (d) En déduire l'expression de l'amplitude  $\tilde{A}_{2s}$  en fonction de l'amplitude incidente  $\tilde{A}_{1e}$ .
31. On suppose pour toute la suite les deux miroirs identiques (et caractérisés par  $R$  et  $T$ ). Déduire de ce qui précède l'expression du coefficient de transmission en énergie de la cavité  $T_C(\omega)$  en fonction de  $T$ ,  $R$  et  $\Phi(\omega)$ .
32. (a) A quelle condition sur la phase  $\Phi(\omega)$  la transmission  $T_C(\omega)$  est-elle maximale ?
  - (b) Donner l'expression de l'intervalle spectral libre défini en pulsation :  $\Delta_{ISL} = \omega_{m+1} - \omega_m$ , où  $\omega_m$  et  $\omega_{m+1}$  sont deux pulsations de résonance consécutives.
  - (c) Donner la valeur de  $T_C^{max}$ .
33. Soit  $\varepsilon(\omega)$  le désaccord de phase  $\varepsilon(\omega) = \Phi(\omega) - \Phi(\omega_m)$  où  $\omega_m$  est la pulsation de résonance la plus proche de  $\omega$ . Exprimer  $\varepsilon(\omega)$  en fonction du décalage de pulsation  $\omega - \omega_m$  et de  $\Delta_{ISL}$ .

34. On considère dorénavant uniquement le mode du champ électromagnétique de pulsation  $\omega_m$  (noté  $\omega_0$  par la suite). On suppose que le décalage de pulsation  $\Delta = \omega - \omega_m$  est très faible devant l'intervalle spectral libre en pulsation, soit  $|\Delta| \ll \Delta_{ISL}$ . Montrer que le coefficient de transmission de la cavité sans oscillateurs  $T_C(\Delta)$  se réécrit, après développement

$$T_C^{sans}(\Delta) = \frac{T^2}{[1 - R]^2 + R(2\pi\Delta/\Delta_{ISL})^2} \quad (7)$$

35. Soit  $\gamma_C$  la largeur totale à mi-hauteur des pics de transmission  $T_C^{sans}(\Delta)$  de la cavité sans oscillateurs.
- Pour quelles valeurs de  $\Delta$  la transmission chute-t-elle d'un facteur 2 ?
  - En déduire l'expression de  $\gamma_C$  en fonction de  $\Delta_{ISL}$  et  $R$ , puis en fonction de  $R$ ,  $c$ ,  $L$  et  $n_B$ .
  - En déduire l'expression de la finesse  $F$  définie par :  $F = \Delta_{ISL}/\gamma_C$ .

## 1.2 Durée de vie du mode de cavité

On considère dans cette partie que le champ dans la cavité a été créé au voisinage de  $t = 0$ , au moyen d'une impulsion intense  $\tilde{E}_{1e}(z, t)$ , de pulsation moyenne  $\omega_0$ , et de durée nettement plus longue que le temps d'un aller retour de la lumière dans la cavité. On s'intéresse à l'évolution temporelle ultérieure de l'amplitude du champ électrique dans la cavité, après coupure de l'excitation.

On considère ainsi que le champ dans la cavité est alors la superposition d'une onde progressive  $\tilde{E}_C(z, t) = A_C(t) \exp[j(kz - \omega_0 t)]$  et d'une onde progressive de direction opposée  $\tilde{E}'_C(z, t) = A'_C(t) \exp[j(-kz - \omega_0 t)]$ . Les amplitudes  $A_C(t)$  et  $A'_C(t)$  sont lentement variables : les variations rapides sont contenues dans le terme  $\exp[j(kz - \omega_0 t)]$ . Le déphasage  $\Phi(\omega_0)$  associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité étant un multiple de  $2\pi$ , on peut prendre  $A_C(t)$  et  $A'_C(t)$  réels. Il existe également deux ondes sortantes  $\tilde{E}_{1s}(z, t) = \tilde{A}_{1s}(t) \exp[j(-kz - \omega_0 t)]$  et  $\tilde{E}_{2s}(z, t) = \tilde{A}_{2s}(t) \exp[j(kz - \omega_0 t)]$  vers les  $z$  décroissant et croissant respectivement (voir Figure 3).

36. On note  $\tau$  le temps mis par l'onde pour faire un aller-retour dans la cavité. Exprimer  $\tau$  en fonction des caractéristiques de la cavité.
37. Justifier qu'après excitation de la cavité par une impulsion de durée bien supérieure à  $\tau$ , le champ remplit toute la cavité. Expliquer pourquoi les amplitudes  $A_C(t)$  et  $A'_C(t)$  varient lentement à l'échelle du temps  $\tau$ .
38. Exprimer  $A'_C(t)$  en fonction de  $A_C(t - \tau)$  et des coefficients caractérisant le miroir  $M_2$ .
39. Rappeler la relation reliant l'amplitude  $A_C(t)$  à l'amplitude  $A'_C(t)$  et aux coefficients caractérisant le miroir  $M_1$ . En déduire une relation entre  $A_C(t)$  et  $A_C(t - \tau)$ .
40. Sachant que l'amplitude varie très peu pendant la durée  $\tau$ , calculer  $A_C(t) - A_C(t - \tau)$  et montrer que l'évolution de  $A_C(t)$  est gouvernée par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dA_C(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{2}A_C(t)$$

41. Exprimer le taux de décroissance du champ dans la cavité  $\gamma/2$  en fonction de  $(1 - R)$  et de  $\tau$ .
42. Montrer que le coefficient d'amortissement de l'énergie emmagasinée dans la cavité est  $\gamma$ . Exprimer  $\gamma$  en fonction de  $(1 - R)$ ,  $L$ ,  $n_B$  et  $c$ . Quel est le lien entre ce coefficient d'amortissement  $\gamma$  de l'énergie du mode de cavité et la largeur totale à mi-hauteur  $\gamma_C$  des pics de transmission ?

43. De quelle manière évolue l'intensité  $I_s(t)$  détectée en sortie de cavité ? Donner l'expression de la durée caractéristique  $\delta T$  de ce signal.

## 2 Oscillateurs de Lorentz

### 2.1 Electron élastiquement lié

En l'absence d'oscillateurs, le matériau est transparent, d'indice de base  $n_B$ . En présence des oscillateurs, la permittivité diélectrique relative de la matière  $\tilde{\epsilon}_r$  comporte deux termes : d'une part la permittivité constante  $\epsilon_{rB} = n_B^2$ , d'autre part la susceptibilité diélectrique des oscillateurs  $\tilde{\chi}(\omega)$  :

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_{rB} + \tilde{\chi}(\omega) \quad (8)$$

On modélise ces oscillateurs en les assimilant à  $N$  atomes par unité de volume possédant chacun un électron (masse  $m$ , charge  $-e$ ) lié au coeur de l'atome par un potentiel harmonique défini par la constante de rappel  $m\omega_0^2$ . On note  $\vec{r}$  la position de l'électron par rapport au centre de l'atome. On modélise les effets dissipatifs par une force de frottement de la forme  $\vec{f} = -m\gamma_A \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de l'électron. Ces effets dissipatifs sont faibles, ce qui se traduit par  $\gamma_A \ll \omega_0$ .

44. Donner l'équation du mouvement de l'électron en présence du champ électrique  $\vec{E}(t)$ .
45. On rappelle que, dans cette partie, on représente une grandeur harmonique  $h$  de pulsation  $\omega$  par  $h(t) = \Re[\tilde{H} \exp(-j\omega t)]$ , en suivant la convention déjà adoptée pour les ondes. Donner alors l'expression de la susceptibilité diélectrique  $\tilde{\chi}(\omega)$  en fonction de  $\omega$ , de  $\omega_0$ , du coefficient d'amortissement  $\gamma_A$  et de la pulsation plasma  $\omega_p$  définie par :

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide.

46. On ne s'intéresse qu'au voisinage de la résonance. Sachant que  $|\Delta| \ll \omega_0$ , donner l'expression approchée de  $\tilde{\chi}$  en fonction de l'écart de pulsation  $\Delta = \omega - \omega_0$ , du coefficient d'amortissement  $\gamma_A$ , de  $\omega_p$  et de  $\omega_0$ .

### 2.2 Absorption et dispersion

47. Rappeler le lien entre l'indice complexe  $\tilde{n}$  et la permittivité diélectrique relative  $\tilde{\epsilon}_r$ . Sachant que  $|\tilde{\chi}(\omega)| \ll \epsilon_{rB}$ , faire un développement de l'indice complexe  $\tilde{n}$  au premier ordre par rapport à  $\tilde{\chi}$ .
48. Rappeler comment l'indice de réfraction  $n$  et le coefficient d'absorption  $\alpha$ , défini par rapport à l'intensité, sont reliés aux parties réelle et imaginaire de l'indice complexe.
49. Exprimer  $\tilde{n}$  en fonction de  $\omega_p$ ,  $\omega_0$ ,  $n_B$ ,  $\gamma_A$  et  $\Delta$ . En déduire que l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption du milieu contenant les oscillateurs de Lorentz sont de la forme :

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \frac{\gamma_A^2}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \quad \text{et} \quad n(\omega) = n_B - \alpha_0 \frac{c}{\omega_0} \frac{\Delta\gamma_A}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \quad (9)$$

Exprimer  $\alpha_0$  en fonction de  $\omega_p$ ,  $n_B$ ,  $c$  et  $\gamma_A$ .

50. Comment  $\alpha_0$  varie-t-il avec le nombre  $N$  d'oscillateurs par unité de volume ?
51. Quelle est la largeur totale à mi-hauteur du pic d'absorption ?

### 3 Caractéristiques de la cavité avec oscillateurs

Le milieu matériel résonnant décrit ci-dessus occupe maintenant tout le volume de la cavité.

#### 3.1 Effet de la dispersion

Dans cette partie on s'intéresse à l'effet de la dispersion : on ne prend pas en compte pour le moment l'absorption.

52. Donner la nouvelle expression du déphasage  $\Phi_{avec}(\omega)$  associé à un aller-retour de la lumière dans la cavité.
53. On considère que la cavité vide est accordée sur la pulsation  $\omega_0$ . On a donc  $\Phi_{sans}(\omega_0) = p2\pi$ , avec  $p$  entier.
  - (a) En considérant la forme de la fonction  $n(\omega)$ , montrer que  $\Phi_{avec}(\omega_0)$  vaut toujours  $\Phi_{avec}(\omega_0) = p2\pi$ .
  - (b) On cherche s'il existe, au voisinage de  $\omega_0$ , d'autres valeurs de la pulsation qui vérifient la relation d'accord de phase  $\Phi_{avec}(\omega) = p2\pi$ , avec la même valeur entière  $p$ . Traduire cette condition sous la forme d'une relation liant  $n(\omega)$ ,  $n_B$ ,  $\omega$  et  $\omega_0$ .
  - (c) Discuter cette relation en traçant sur un même graphique la fonction  $n(\omega)$  et une fonction de  $\omega$  à déterminer, sur un petit domaine de pulsation autour de  $\omega_0$ . Montrer à l'aide du graphique qu'il existe, suivant l'importance du terme résonnant, soit une soit trois solutions vérifiant cette condition d'accord de phase.
54. Donner la nouvelle expression du désaccord de phase  $\varepsilon(\omega) = \Phi_{avec}(\omega) - \Phi_{avec}(\omega_0)$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $L$ ,  $c$ ,  $n_B$  et  $n(\omega)$ .
55. En introduisant le décalage de pulsation  $\Delta = \omega - \omega_0$ , montrer que le désaccord de phase  $\varepsilon(\omega)$  en présence du milieu résonnant peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta_{ISL}} \left[ \Delta - \frac{\beta^2 \Delta}{4\Delta^2 + \gamma_A^2} \right] \quad (10)$$

où  $\beta$  est un paramètre positif caractérisant le couplage entre les oscillateurs et la cavité. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $F$ ,  $\alpha_0$ ,  $L$ ,  $\gamma_A$  et  $\gamma_C$ .

56. Exprimer ensuite  $\beta$  en fonction de  $N$ ,  $e$ ,  $m$ ,  $\epsilon_0$  et  $n_B$ . Montrer que  $\beta$  s'écrit simplement en fonction de  $\omega_p$  (qui caractérise la partie résonnante de la matière) et de l'indice de base  $n_B$  qui caractérise la matière non résonnante.
57. Préciser la discussion graphique précédente en recherchant les zéros de la fonction  $\varepsilon(\omega)$ . Donner la position des nouveaux modes résonnants en fonction des paramètres  $\beta$  et  $\gamma_A$ . Montrer que les nouveaux modes résonnants n'apparaissent que pour un couplage supérieur à un couplage critique  $\beta_c$  que l'on précisera.
58. Préciser la dépendance de  $\beta$  avec  $N$ . Comment faut-il choisir la concentration volumique d'oscillateurs pour avoir un couplage élevé ?
59. La prise en compte du phénomène d'absorption, qui fait l'objet de la partie suivante, révèle l'existence de *deux* pics de transmission alors que l'on a *trois* zéros de la fonction désaccord de phase  $\varepsilon(\omega)$ . Proposer une explication.

#### 3.2 Effets de la dispersion et de l'absorption

L'absorption est maintenant prise en compte.

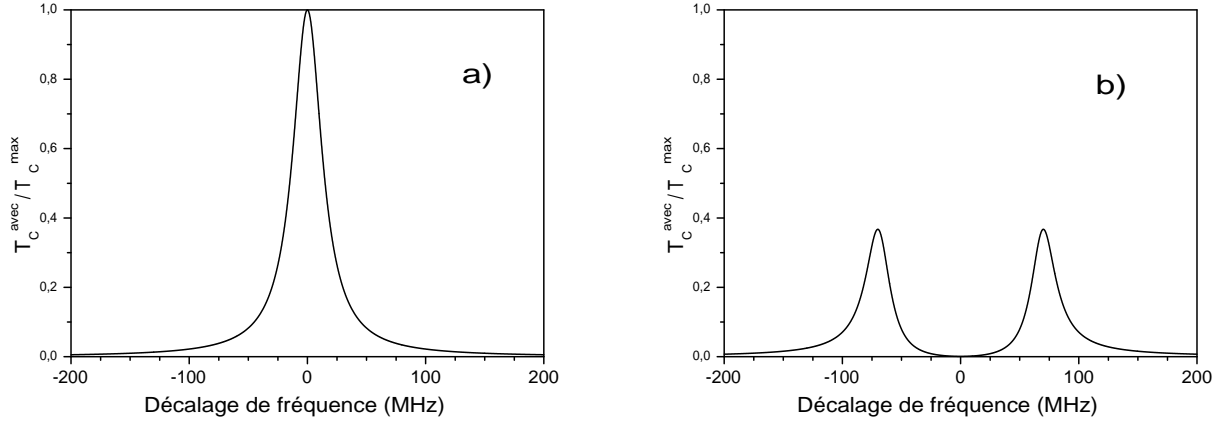


FIG. 4 – Transmission de la cavité optique en fonction du décalage de fréquence entre le laser et la résonance de la cavité vide. a) cavité vide, b) cavité traversée par le jet atomique.

60. Montrer qu'en présence du milieu absorbant, le coefficient de transmission de la cavité  $T_C(\Delta)$  vaut :

$$T_C^{avec}(\omega) = \frac{T^2 \exp(-\alpha(\omega)L)}{[1 - R \exp(-\alpha(\omega)L)]^2 + 4R \exp(-\alpha(\omega)L) \sin^2(\Phi(\omega)/2)} \quad (11)$$

61. On fait l'hypothèse d'une très faible absorption pour un aller-retour dans la cavité, soit  $\alpha(\omega)L \leq \alpha_0 L \ll 1$ . On se limite à de très petits écarts de pulsation :  $|\Delta| \ll \Delta_{ISL}$ . On rappelle que la cavité est de grande finesse ( $R \simeq 1$ ). Montrer que le coefficient de transmission de la cavité  $T_C(\Delta)$  se réécrit, après développement

$$T_C^{avec}(\omega) = \frac{T^2}{[1 - R + \alpha(\omega)L]^2 + \varepsilon(\omega)^2} \quad (12)$$

62. En utilisant les résultats des questions 32, 35, 49 et 55, on arrive après des manipulations algébriques élémentaires *qui ne sont pas demandées* à exprimer  $T_C^{avec}(\Delta)$  sous la forme

$$T_C^{avec}(\Delta) = T_C^{max} \frac{\gamma_C^2}{u - (2\beta^2 + \gamma_A^2 - \gamma_C^2) + (\Omega^2 + \gamma_A^2)^2/u} \quad (13)$$

où  $u$  représente la quantité  $u = 4\Delta^2 + \gamma_A^2$ , et

$$\Omega^2 = \beta^2(\beta^2 + 2\gamma_A^2 + 2\gamma_A\gamma_C) - \gamma_A^2$$

On suppose dorénavant que le coefficient de couplage  $\beta$  est assez élevé pour que  $\Omega$  soit réel (positif). On cherche à préciser la forme de la fonction de transmission  $T_C^{avec}(\Delta)$ , et en particulier la position, la largeur et la hauteur des pics de transmission.

- (a) Montrer que  $T_C^{avec}(\Delta)$  possède deux pics dont les positions sont  $\Delta_{\pm} = \pm\Omega/2$ . Vérifier que ces pics sont légèrement décalés par rapport aux zéros de la fonction désaccord de phase  $\varepsilon(\omega)$ , déterminés à la question 57.
- (b) On suppose pour toute la suite que  $\beta \gg \gamma_A$  et  $\beta \gg \gamma_C$ . Montrer que  $\Omega$  peut s'écrire de manière approchée :  $\Omega \sim \sqrt{\beta^2 + \gamma_A\gamma_C}$
- (c) Calculer alors la hauteur des pics de transmission en  $\Delta = \pm\Omega/2$ , en fonction de  $T_C^{max}$ ,  $\gamma_A$  et  $\gamma_C$ .

- (d) Montrer que ces pics ont une forme lorentzienne. On posera  $\Delta = \pm\Omega/2 + \eta$  avec  $|\eta| \ll \Omega/2$ .
- (e) Déterminer la largeur totale à mi-hauteur des pics de transmission  $\gamma_{AC}$ , en fonction de  $\gamma_A$  et  $\gamma_C$ .
63. Dans l'expérience représentée sur la figure 2.a, un jet d'atomes de Baryum traverse une cavité optique résonnante avec une transition du Baryum. Cette fréquence de résonance est  $\omega_0/(2\pi) = 5,4 \cdot 10^{14}$  Hz. La largeur de la transition atomique est connue et vaut  $\gamma_A/(2\pi) = 20$  MHz. L'absorbance  $\alpha_0 L$  vaut  $\alpha_0 L = 0,2$  et la finesse de la cavité est  $F = 500$ .
- (a) Dédurre de la figure 4.a la largeur du mode de cavité  $\gamma_C/(2\pi)$ .
- (b) En présence du jet atomique le pic de transmission se dédouble. Vérifier que les caractéristiques des deux pics de transmission obtenus sur la figure 4.b sont compatibles avec les prédictions du modèle précédent : distance  $\Omega/(2\pi)$  entre les pics de transmission de la cavité, largeur des pics de transmission  $\gamma_{AC}/(2\pi)$ , hauteur des pics de transmission.

### 3.3 Evolution temporelle de l'intensité en sortie de cavité

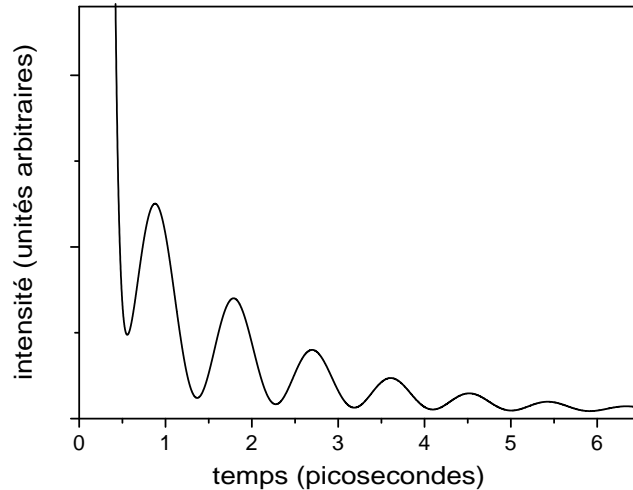


FIG. 5 – Evolution temporelle de l'impulsion transmise par la cavité. La courbe représente l'intensité détectée en fonction du temps en sortie de la cavité après excitation par une impulsion lumineuse.

On suppose maintenant que l'on a excité à  $t \sim 0$  la cavité avec une impulsion laser de pulsation moyenne  $\omega_0$  et de durée  $\Delta t$ . Le champ électrique de cette impulsion (dans le plan  $z = 0^-$  juste avant le miroir  $M_1$ ) est de la forme  $E_{1e}(t) = A_{1e}(t) \exp(-j\omega_0 t)$ . L'enveloppe  $A_{1e}(t)$  est non nulle sur un intervalle de largeur  $\Delta t$ . L'onde en sortie de cavité peut s'écrire (dans le plan  $z = L^+$  juste après le miroir  $M_2$ ) sous la forme  $E_{2s}(t) = A_{2s}(t) \exp(-j\omega_0 t)$ . On cherche à déterminer l'allure de l'enveloppe  $A_{2s}(t)$ .

Dans la description classique faite ici, le système cavité-matière est linéaire ; sa réponse temporelle est donc liée à sa réponse en fréquence par une transformation de Fourier. On décompose donc chaque champ sous la forme

$$E_{1e}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_e(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega$$

$$E_{2s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_s(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega$$

Pour chaque pulsation , on peut écrire

$$\hat{E}_s(\omega) = t_C(\omega) \hat{E}_e(\omega) \quad \text{où} \quad t_C(\omega) = \sqrt{T_C(\omega)} \exp[j\varphi(\omega)]$$

est le coefficient de transmission en amplitude de la cavité, de module  $\sqrt{T_C(\omega)}$  et de phase  $\varphi(\omega)$ . Pour la suite on supposera que cette phase  $\varphi(\omega)$  varie peu sur un intervalle de quelques  $\Omega$  autour de  $\omega_0$ ; on négligera donc l'influence du terme  $\exp[j\varphi(\omega)]$  dans ce qui suit.

64. L'impulsion doit être suffisamment brève pour que sa largeur spectrale soit nettement supérieure à  $\Omega$ . Quelle condition doit vérifier la durée  $\Delta t$  de cette impulsion d'excitation ?
65. Sachant que le facteur de transmission en amplitude de la cavité  $t_C(\omega)$  est constitué de deux "pics" centrés en  $\omega_0 \pm \Omega/2$  et de largeur  $\sim \gamma_{AC}$ , comment varie le champ  $E_{2s}(t)$  en sortie de cavité ?
66. Représenter sur un schéma l'allure de  $E_{2s}(t)$ ; on fera apparaître la fonction enveloppe  $A_{2s}(t)$ . Comparer les variations du champ électrique  $E_{2s}(t)$  en sortie de cavité aux variations du courant  $i_2(t)$  dans le cas des circuits électriques couplés (question 26).
67. Montrer que l'intensité  $I_s(t)$  de l'impulsion détectée en sortie de cavité présente des oscillations amorties. Relier la période  $T_{osc}$  de ces oscillations et leur durée caractéristique  $\delta T'$  aux quantités  $\Omega$  et  $\gamma_{AC}$ .
68. La figure 5 représente l'allure typique du signal enregistrée dans le domaine visible ( $\omega_0/(2\pi) = 3,6 \cdot 10^{14}$  Hz) pour une hétérostructure semiconductrice GaAs/GaAlAs. En 4,5 ps, on observe 5 oscillations et une décroissance globale d'un facteur 20 du signal (cf. Fig. 5). Donner l'ordre de grandeur de la durée caractéristique  $\delta T'$  et de la période  $T_{osc}$  des oscillations. En déduire, dans le domaine fréquentiel, les valeurs de l'écart entre les deux pics  $\Omega/(2\pi)$  et de la largeur des pics  $\gamma_{AC}/(2\pi)$ .
69. La longueur optique effective de la cavité est de quelques micromètres. Traduire numériquement les deux conditions imposées sur la durée  $\Delta t$  de l'impulsion d'excitation (questions 37 et 64). Ces conditions sont elles compatibles ?

## Troisième partie

# Couplage entre états quantiques

Dans cette partie on aborde le traitement quantique du couplage des deux oscillateurs. On présente d'abord le cas le plus simple du couplage de deux états discrets de durée de vie infinie. On envisage cette situation dans le cas d'un mode électromagnétique discret de la cavité et d'un système à deux niveaux présent dans la cavité.

On considère ensuite le cas du couplage d'un état discret à un continuum. Il s'agit par exemple du mode électromagnétique discret de la cavité, faiblement couplé au continuum des modes électromagnétiques extérieurs à la cavité. On cherche à montrer que ce couplage se traduit par un temps de vie fini pour le mode de cavité.

On présente enfin un modèle permettant un passage progressif entre ces deux situations limites. Cette situation permettra de décrire le couplage entre un niveau atomique discret et un mode de la cavité de largeur finie.

## 1 Couplage entre deux états discrets

On considère un système atomique présentant deux niveaux, un niveau fondamental  $|g\rangle$  et un niveau excité  $|e\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_0$  par rapport au fondamental, placé dans une cavité optique présentant un mode électromagnétique résonnant avec la transition  $e - g$ . On considère uniquement deux états possibles pour la cavité : l'état  $|0\rangle$  sans photon et l'état  $|1\rangle$  à un photon dans la cavité. Le système composite atome-photon, d'hamiltonien  $H_0$ , a donc deux états excités de même énergie,  $|e, 0\rangle$  (atome dans son état excité, pas de photon) et  $|g, 1\rangle$  (atome dans son état fondamental, un photon), au dessus de l'état fondamental  $|g, 0\rangle$ , comme indiqué sur la figure 6.

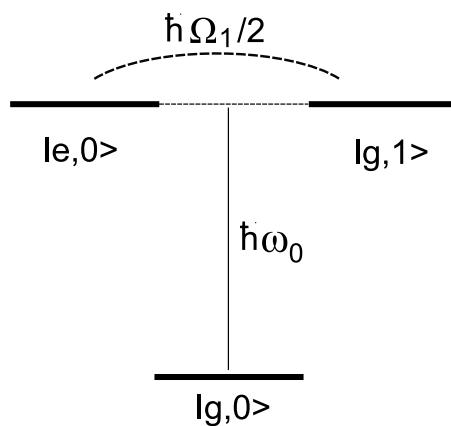


FIG. 6 – Diagramme d'énergie du système atome-champ

Le système atomique peut absorber un photon de la cavité ou en émettre un. L'interaction dipolaire électrique fait apparaître un terme de couplage hors-diagonal de la forme  $H_1 = -d \cdot E_0$ , où  $d$  est l'élément de matrice du dipôle et  $E_0 = \sqrt{\hbar\omega_0/(2\epsilon_0 V)}$  est le "champ électrique par photon",  $V$  étant le "volume" du mode. On admet que le couplage lumière-matière entre ces deux états ne comporte que ces termes hors-diagonaux, qu'on supposera réels positifs :

$$\langle g, 1 | H_1 | e, 0 \rangle = \langle e, 0 | H_1 | g, 1 \rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2} > 0$$



L'hamiltonien  $H_0 + H_1$  est donc représenté dans le sous-espace  $|e, 0\rangle, |g, 1\rangle$  par la matrice :

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

70. Donner l'expression des énergies  $\hbar\omega_{\pm}$  des états perturbés.
71. Donner l'expression des états propres normalisés  $|\psi_+\rangle$  et  $|\psi_-\rangle$  en fonction de  $|e, 0\rangle$  et  $|g, 1\rangle$ .
72. On prépare initialement le système dans l'état  $|\psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$  à  $t = 0$ . Soit  $|\psi(t)\rangle$  l'état du système, normalisé, à l'instant  $t$ . Donner l'expression de  $|\psi(t)\rangle$  en fonction de  $|\psi_+\rangle$  et  $|\psi_-\rangle$ , puis en fonction de  $|e, 0\rangle$  et  $|g, 1\rangle$ .
73. En déduire la probabilité  $P_C(t)$  de trouver le système dans l'état initial  $|e, 0\rangle$ . Donner l'expression de la pulsation de Rabi qui caractérise l'oscillation observée.
74. Dans le cas des expériences réalisées avec un jet atomique, chaque atome passe un temps fini dans la cavité. Le couplage ne s'applique donc que de  $t = 0$  à  $t = t_1$ , pendant que l'atome traverse la cavité. À l'instant  $t = 0$  l'atome est dans son état excité  $|e\rangle$ , et la cavité ne contient pas de photon.
  - (a) A quelle condition sur le produit  $\Omega_1 t_1$  retrouve-t-on en sortie de cavité l'atome dans son état fondamental, avec un photon dans la cavité ?
  - (b) Décrire l'état final du système atome-cavité dans le cas  $\Omega_1 t_1 = \pi/2$ . En quoi cet état échappe-t-il à toute description classique ?
75. Faire un lien entre les états stationnaires  $|\psi_+\rangle$  et  $|\psi_-\rangle$  du hamiltonien  $H_0 + H_1$  et l'allure du spectre de transmission de la cavité optique étudiée dans la deuxième partie du problème.

## 2 Couplage d'un état discret à un continuum large

On considère un système d'hamiltonien  $H_0$ . Ce système comporte un état discret  $|i\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_i$  et un quasi-continuum d'états  $|k\rangle$  d'énergie  $\hbar\omega_k = \hbar\omega_i + k\varepsilon$ , avec  $k$  entier variant de  $-\infty$  à  $+\infty$  (voir Fig. 7). L'écart énergétique  $\varepsilon$  entre deux niveaux d'énergie consécutifs est très petit. Ces états, très serrés et équidistants en énergie peuvent être assimilés à un continuum de densité d'états en énergie constante  $\rho(\hbar\omega) = \rho_0 = 1/\varepsilon$ .

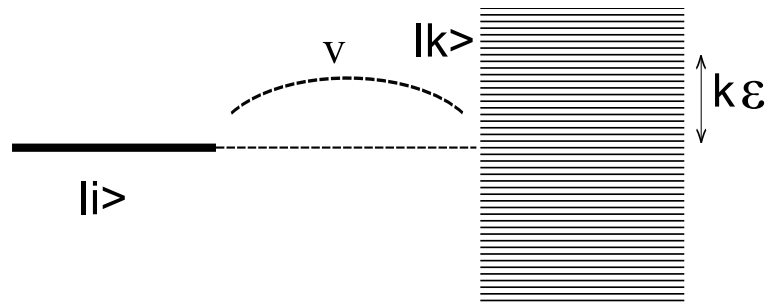


FIG. 7 – Diagramme d'énergie du système état discret - continuum large

On considère une faible perturbation  $H_1$  couplant l'état discret et le quasi-continuum, possédant les propriétés suivantes :

$$\langle k|H_1|i\rangle = v \quad \langle i|H_1|k\rangle = v^* \quad \langle i|H_1|i\rangle = 0 \quad \langle k|H_1|k\rangle = 0$$

Le vecteur d'état du système à l'instant  $t$  s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = c_i(t)e^{-j\omega_i t} |i\rangle + \sum_k c_k(t)e^{-j\omega_k t} |k\rangle$$

76. Rappeler la forme générale de l'équation de Schrödinger reliant  $|\Psi(t)\rangle$  et l'hamiltonien  $H_0 + H_1$ .
77. Appliquer cette relation pour obtenir deux équations différentielles, l'une reliant  $dc_i/dt$  à une somme portant sur les coefficients  $c_k(t)$ , l'autre reliant  $dc_k/dt$  à  $c_i(t)$ .
78. Exprimer  $dc_i/dt$  sous la forme d'une intégrale. On utilisera pour cela la relation de passage de la somme discrète à l'intégrale :

$$\sum_k f_k = \int f_k \rho_0 d(\hbar\omega_k)$$

79. Le système est préparé dans l'état  $|i\rangle$  à l'instant  $t = 0$ . On a donc comme conditions initiales :  $c_i(0) = 1$  et  $c_k(0) = 0$ .
- (a) Exprimer  $c_k(t)$  sous la forme d'une intégrale.
- (b) En déduire l'expression de  $dc_i/dt$  sous la forme d'une double intégrale.
80. Simplifier cette équation intégral-différentielle en intégrant d'abord en pulsation, en utilisant l'identité mathématique (1), puis en intégrant en temps, en utilisant l'identité mathématique (2).
81. Montrer que l'amplitude de probabilité  $c_i(t)$  vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{2}c_i(t)$$

Exprimer  $\Gamma$  en fonction de  $v$ ,  $\hbar$  et  $\rho_0$ .

82. Donner la forme de l'évolution temporelle de l'amplitude de probabilité  $c_i(t)$  puis de la probabilité  $P(t)$  de trouver le système dans l'état  $|i\rangle$  à l'instant  $t$ .
83. Quelle est la durée de vie du système préparé dans l'état  $|i\rangle$  ?
84. On se limite dans cette question aux temps courts  $t \ll 1/\Gamma$ . On note  $p$  la probabilité de transition par unité de temps de l'état discret vers le continuum. Montrer que, pour  $t \ll 1/\Gamma$ , la probabilité de transition par unité de temps  $p$  vaut  $\Gamma$ . En déduire qu'on retrouve bien la règle d'or de Fermi, qui s'écrit pour ce continuum non-dégénéré :

$$p = \frac{2\pi}{\hbar}|v|^2\rho(\hbar\omega = \hbar\omega_i)$$

85. Montrer que l'amplitude de probabilité  $c_k(t)$  s'écrit :

$$c_k(t) = \frac{v}{\hbar} \frac{1 - e^{-\Gamma t/2} e^{j(\omega_k - \omega_i)t}}{\omega_k - \omega_i + j\Gamma/2} \quad (15)$$

86. On se place à  $t \gg 1/\Gamma$ . Calculer la probabilité  $dP$  de trouver le système dans un état du continuum d'énergie  $\hbar\omega_k$  à  $d(\hbar\omega_k)$  près à l'instant  $t$ . Justifier la forme spectrale de la raie d'émission d'un atome à deux niveaux au repos. Préciser la valeur de la largeur de la raie.

### 3 Transition couplage faible - couplage fort

Pour faire un lien entre les deux situations de couplage : entre deux états discrets (couplage fort) ou entre un état discret et un continuum large (couplage faible) on envisage dans cette dernière partie le couplage entre un état discret et un continuum de largeur finie

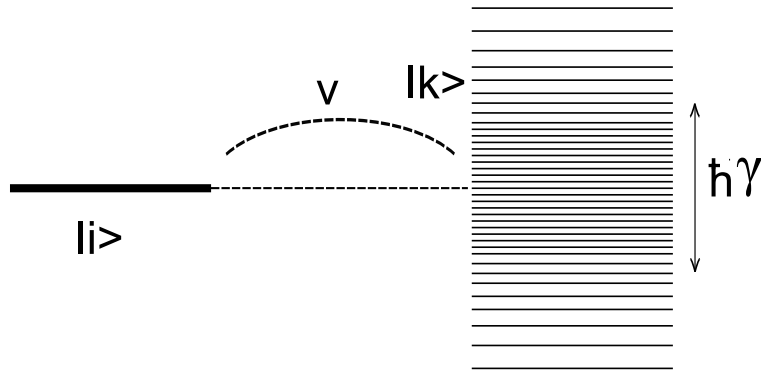


FIG. 8 – Diagramme d'énergie du système niveau discret - continuum de largeur  $\hbar\gamma$

(voir Fig. 8). On suppose que le continuum a une densité d'états en énergie de forme lorentzienne, avec une largeur totale à mi-hauteur  $\hbar\gamma$ .

$$\rho(\hbar\omega) = \rho_0 \frac{\gamma^2}{4(\omega - \omega_i)^2 + \gamma^2}$$

87. En adaptant le résultat obtenu à la question 79b, donner la nouvelle équation intégral-différentielle vérifiée par  $c_i(t)$ .
88. Simplifier cette relation en utilisant la relation (3) du formulaire.
89. Dériver l'équation obtenue par rapport au temps. Montrer que l'évolution de  $c_i(t)$  est régie par l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 c_i(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{dc_i(t)}{dt} + \frac{\Gamma\gamma}{4} c_i(t) = 0$$

90. On prend comme conditions initiales :  $c_i(0) = 1$  et  $c_k(0) = 0$ . Montrer que

$$\frac{dc_i}{dt}(t=0) = 0$$

91. Cas du couplage faible :  $\Gamma < \gamma/4$ .
- Donner la forme des solutions dans le cas où  $\Gamma < \gamma/4$ .
  - Montrer que pour  $\Gamma \ll \gamma/4$  (continuum large), on retrouve aux temps longs la loi de décroissance exponentielle, avec une durée de vie du système préparé dans l'état  $|i\rangle$  égale à  $1/\Gamma$ .
92. Cas du couplage fort :  $\Gamma > \gamma/4$ .
- Donner la forme des solutions dans le cas où  $\Gamma > \gamma/4$ .
  - On considère dans les questions qui suivent le cas  $\Gamma \gg \gamma/4$  (continuum étroit). Donner l'expression de l'amplitude de probabilité  $c_i(t)$  à l'ordre le plus bas.
  - Donner de même l'expression de la probabilité  $P(t)$  de trouver le système dans l'état  $|i\rangle$  à l'instant  $t$ .
  - Exprimer, en fonction de  $\Gamma$  et  $\gamma$ , la pulsation  $\Omega$  des oscillations obtenues pour  $P(t)$ , et le coefficient d'amortissement de ces oscillations. On pourra vérifier que la condition de couplage fort énoncée ici  $\Gamma > \gamma/4$  se réécrit  $\Omega > (\gamma - 0)/2$ , condition analogue à celle envisagée dans la première partie.

(e) Montrer que la pulsation  $\Omega$  des oscillations est de la forme :

$$\Omega = \frac{2|v|}{\hbar} \sqrt{N}$$

Que représente le nombre  $N$  ? Comparer la pulsation obtenue avec celle qu'on aurait dans le cas d'un couplage de l'état  $|i\rangle$  à un état unique.

93. Le continuum de densité d'état  $\rho(\hbar\omega)$  (de largeur  $\hbar\gamma$ ) représente la densité spectrale du mode à 1 photon de la cavité. Cet élargissement est dû à la durée de vie finie du mode de cavité (égale à  $1/\gamma$ ). L'état discret représente l'état excité atomique, de durée de vie beaucoup plus longue que celle du photon.

- (a) L'obtention de sources de photons uniques de taux de répétition élevé nécessite de réduire fortement le temps de vie radiatif du système atomique. Montrer que, en régime de couplage faible, le couplage du système atomique avec la cavité permet de réduire fortement ce temps de vie radiatif.
- (b) Dans le régime de couplage fort, préciser de quelle manière la largeur des pics de transmission est modifiée. Discuter l'origine physique de ce phénomène.