

épreuve C
problème de physique

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document est interdit.

CANALISATION DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CRISTAL

Le problème concerne le phénomène de « canalisation » de particules chargées rapides qui traversent un monocristal.

La partie I est une étude préliminaire de la structure cristalline du silicium et propose une description simple du potentiel électrique entre deux plans réticulaires.

La partie II introduit la géométrie du dispositif expérimental et traite le cas de la canalisation planaire d'ions positifs non-relativistes.

La partie III décrit une méthode expérimentale de contrôle de la canalisation et donne un exemple d'application.

La partie IV rappelle des résultats de relativité restreinte qui sont utiles pour la suite.

Ensuite, on considère la canalisation planaire d'un faisceau de positons relativistes : la partie V décrit le mouvement des positons canalisés et la partie VI détermine le rayonnement électromagnétique émis par les positons relativistes « canalisés ».

Les différentes parties du problème sont largement autonomes.

La partie IV est indépendante de ce qui précède, les résultats demandés étant utiles pour la suite.

On peut traiter la partie VI sans avoir résolu la partie V, en admettant les résultats donnés dans l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Constantes fondamentales.

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (valeur exacte : 299 792 458).

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ (unité S.I.).

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ (unité S.I.).

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Charge électrique élémentaire : $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Masse de l'électron (ou du positon) : $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$.

Masse d'un nucléon (proton ou neutron) : $m_u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $m_u c^2 = 939 \text{ MeV}$.

PARTIE I

PLANS RÉTICULAIRES DU CRISTAL DE SILICIUM

Les expériences étudiées dans le problème utilisent un monocristal de silicium.

Les données numériques concernant le cristal de silicium sont :

Numéro et masse atomique molaire du silicium : $Z = 14$, $A = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Masse volumique : $\mu = 2\,330 \text{ kg m}^{-3}$.

Maille de la structure cristalline : $d = 5,43 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Distance entre les plans réticulaires (1,1,0) : $2a = 1,92 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Description géométrique du réseau cristallin.

1. On considère d'abord un réseau cristallin cubique simple de maille d .

Représenter sur un schéma les plans réticulaires de la famille (1,1,0). Les trois indices (1,1,0) sont les composantes d'un vecteur normal à ces plans, le système d'axes étant orienté selon les arêtes des cubes.

a. Exprimer en fonction de d la distance entre deux plans réticulaires consécutifs de cette famille.

b. Quelle est la densité surfacique d'atomes sur chacun de ces plans ?

2. Que devient la distance entre plans réticulaires (1,1,0) dans le cas d'un réseau cubique à faces centrées de même maille d ?

3. La structure cristalline du silicium, comme celle du diamant, est constituée de la réunion de deux réseaux cubiques à faces centrées de même maille d , déduits l'un de l'autre par une translation d'un quart de la diagonale de la maille (vecteur $d/4, d/4, d/4$).

Représenter schématiquement une fraction élémentaire du cristal, constituée d'un cube de côté $d/2$. Indiquer les liaisons covalentes d'un atome de silicium avec ses plus proches voisins : donner leur nombre et déterminer leur distance.

4. Déterminer le nombre n d'atomes de silicium par unité de volume du cristal et la distance $2a$ entre les plans réticulaires (1,1,0). Vérifier la cohérence des données numériques fournies ci-dessus pour μ , d et $2a$.

Modèle du champ électrostatique à l'intérieur du cristal.

Dans toute la suite, on ne considérera qu'un seul ensemble de plans réticulaires, celui de la famille (1,1,0). On choisit un repère $Oxyz$ (vecteurs unitaires e_x, e_y, e_z) lié au cristal tel que l'axe Ox soit perpendiculaire aux plans réticulaires et l'origine O à égale distance des deux plans d'atomes $x = \pm a$; la direction Oz n'est pas une direction privilégiée d'alignement des atomes dans les plans réticulaires.

5. Pour déterminer le champ électrique entre deux plans réticulaires du cristal de silicium, on adopte le modèle suivant : d'une part les noyaux des atomes de silicium et les 10 électrons des couches internes forment un cœur de taille négligeable (rayon $r_0 \cong 0,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$) et sont répartis uniformément sur les plans réticulaires, parallèles et régulièrement espacés de la distance $2a$; d'autre part, les électrons de valence, au nombre de quatre par atome, sont assimilés à une distribution volumique de charge négative uniforme dans tout le cristal.

On néglige les vibrations thermiques du réseau.

a. Donner la configuration électronique fondamentale de l'atome de silicium et justifier brièvement le nombre des électrons de valence par atome.

b. À partir de ce modèle simple, relier la densité surfacique moyenne de charge σ portée par les plans d'atomes à la distribution volumique ρ de charge négative des électrons de valence. Exprimer σ à l'aide de a et n .

6. Montrer que le champ électrostatique dans le cristal entre les deux plans d'atomes $x = \pm a$ est de la forme $E(x, y, z) = -Kxe_x$, où K est une constante dont on donnera l'expression. En déduire le potentiel électrique $U(x)$ entre ces deux plans, en choisissant pour origine $U(0) = 0$.
 7. Vérifier le comportement du champ électrique à la traversée d'un plan d'atomes.
 8. Calculer numériquement les densités de charges ρ et σ , ainsi que le potentiel $U(a)$ prévus par le modèle.
 9. La figure 1 montre une courbe de potentiel obtenue à partir de mesures expérimentales des densités électroniques. Comparer à la forme du potentiel $U(x)$ prévue par le modèle. Expliquer les différences par une critique qualitative du modèle.
- On adoptera pour la suite une valeur ajustée de K qui donne $U(a) = 40 \text{ V}$. Calculer cette valeur.

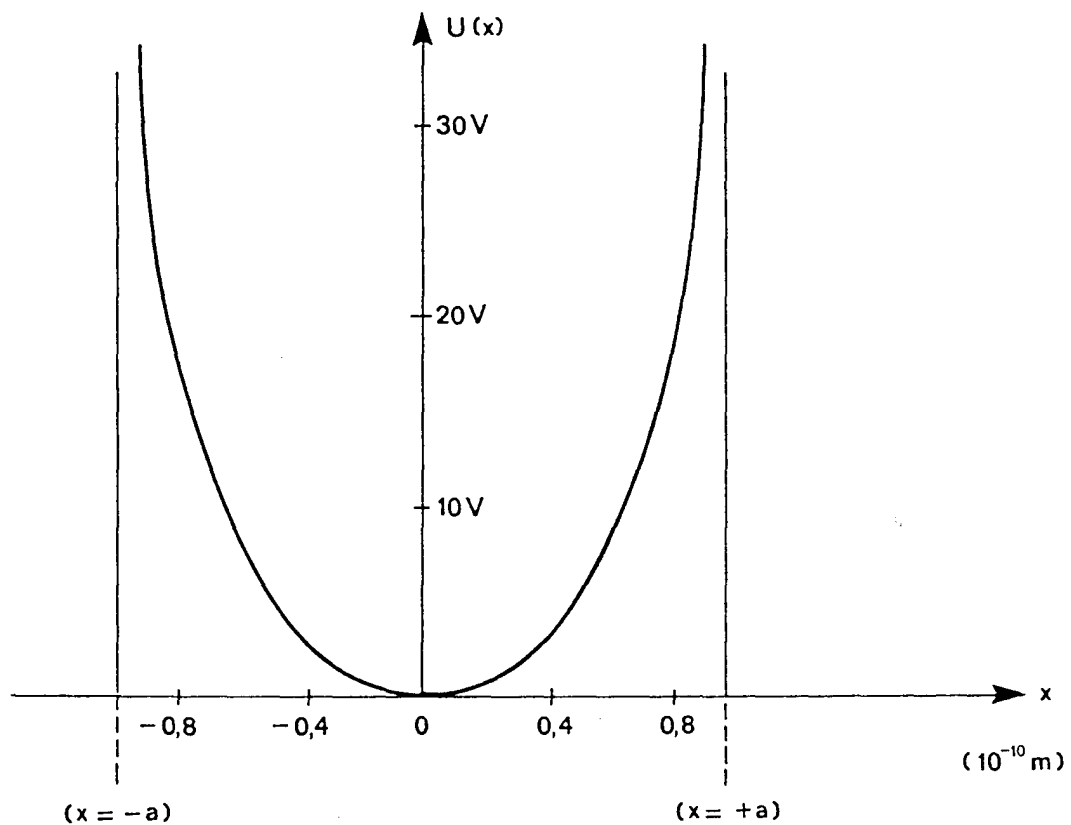


Figure 1

PARTIE II

CANALISATION D'IONS NON RELATIVISTES

Le monocristal de silicium est préalablement orienté avec précision grâce à un goniomètre. On envoie sur le cristal un faisceau monocinétique non relativiste constitué d'ions positifs de charge $q_i = Z_i e$ et de masse m_i .

La géométrie de l'expérience est schématisée sur la figure 2.

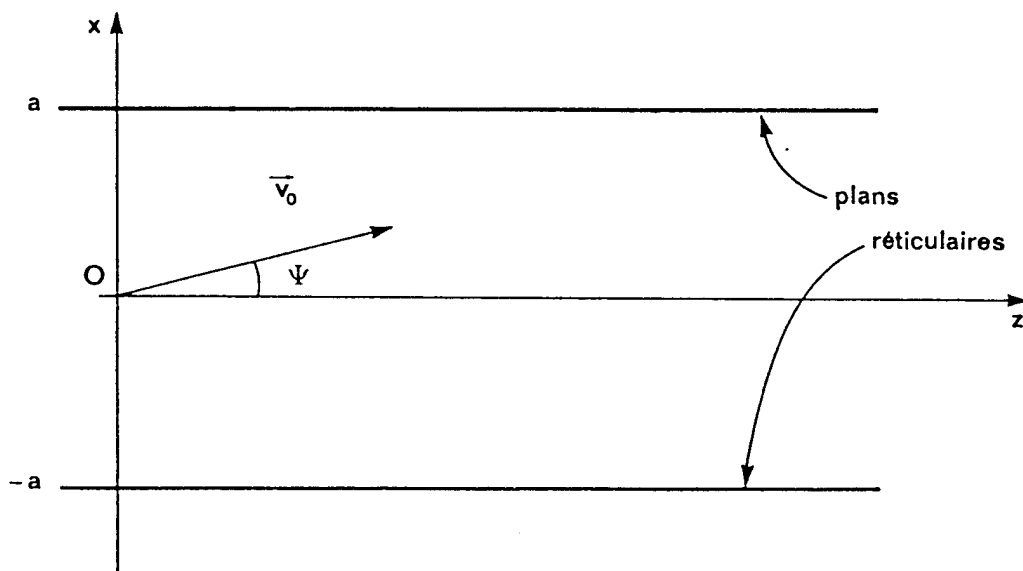


Figure 2

Dans le référentiel R_0 du laboratoire où le cristal est immobile, la position d'une particule du faisceau est repérée par ses coordonnées dans le même système d'axes $Oxyz$ (vecteurs unitaires e_x, e_y, e_z) que dans la partie I.5. L'axe Ox est perpendiculaire aux plans d'atomes, l'origine O à égale distance des deux plans d'atomes $x = \pm a$. La direction Oz n'est pas une direction privilégiée d'alignement des atomes dans les plans réticulaires.

La face d'entrée du cristal est sur le plan Oxy .

Le faisceau accéléré est supposé infiniment fin et pénètre dans le cristal au point O selon une direction voisine de Oz située dans le plan Oxz de la figure (l'angle ψ que fait le faisceau incident avec Oz vérifie $|\psi| \ll 1$ radian).

Dans toute la suite du problème, on conduira l'étude dynamique en négligeant les effets de pénétration du faisceau à la surface du cristal et le freinage dans le cristal dû à un éventuel rayonnement de la particule chargée.

On admet que le mouvement de chaque particule du faisceau est indépendant de celui des autres.

- On étudie le mouvement d'un ion qui se trouve à l'instant $t = 0$ au point O , avec une vitesse :

$$v_0 = v_0 \sin \psi e_x + v_0 \cos \psi e_z, \text{ avec } v_0 \ll c.$$

- Préciser quelles sont les grandeurs conservées au cours du mouvement.
 - Quel potentiel maximum $U(x_m)$ l'ion peut-il atteindre compte tenu des conditions initiales ?
- Montrer qu'il existe une incidence critique ψ_c telle que pour $|\psi| \leq \psi_c$ le mouvement de l'ion est canalisé entre deux plans $|x| = x_m < a$.

Comment x_m dépend-il de l'angle ψ et de la vitesse v_0 ?

Que se passe-t-il pour $|\psi| > \psi_c$?

3. Montrer que l'abscisse x de l'ion est une fonction sinusoïdale du temps t .
Préciser sa pulsation ω et exprimer $x(t)$.
4. Calculer la période spatiale δz , selon la direction Oz , des oscillations de la trajectoire de l'ion.
5. Le faisceau incident est constitué de deutérons D^+ , c'est-à-dire de noyaux de deutérium ${}^2\text{H}$.
Calculer numériquement ψ_c , ω et δz pour une énergie cinétique initiale égale à 5 MeV/nucléon.
6. Comparer δz à la taille de la maille du cristal de silicium. Que peut-on en déduire sur l'approximation faite en I.5. d'une répartition continue des charges dans le cristal ?
7. Justifier la validité de la description classique du mouvement des ions : vérifier d'une part que les vitesses sont non-relativistes; montrer d'autre part que la notion de trajectoire classique $\{x(t), z(t)\}$ est réaliste, ce qui permet un traitement non quantique.
8. Quelle situation analogue de canalisation rencontre-t-on dans le cas de rayons lumineux ?

PARTIE III

CONTRÔLE ET APPLICATION DE LA CANALISATION DES IONS

Contrôle de la canalisation par extinction des réactions nucléaires.

L'expérience suivante permet de contrôler l'effet de canalisation en fonction de l'angle d'incidence ψ .

Comme précédemment (partie II), on envoie sur le monocristal de silicium un faisceau monocinétique de deutérons. Son énergie cinétique est $E = 5 \text{ MeV/nucéon}$ et l'intensité est $I = 0,1 \mu\text{A}$.

L'épaisseur du cristal de silicium, traversée par le faisceau dans la direction Oz pour $\psi = 0$, est $L_z = 40 \mu\text{m}$.

Un détecteur fixe analyse les particules sortant du cristal dans une direction perpendiculaire à celle du faisceau incident (fig. 3).

L'angle ψ est ajusté grâce à un réglage fin de la rotation du goniomètre supportant le cristal ; sa valeur absolue reste petite devant 1 radian, mais peut être très grande devant l'angle critique ψ_c défini en II.2.

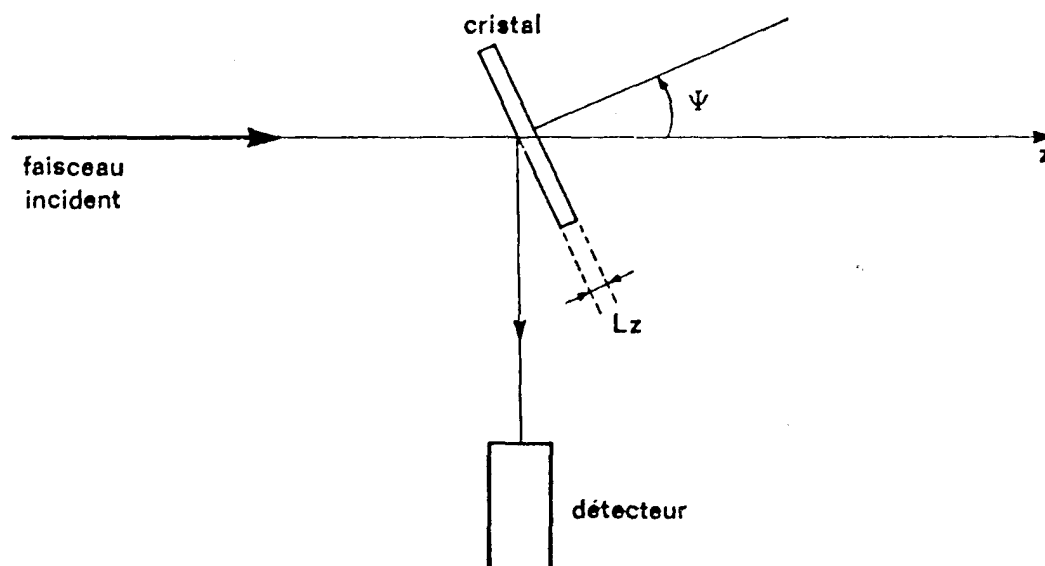
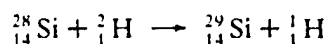


Figure 3

Les deux cas considérés sont : (a) $|\psi| \gg \psi_c$ et le faisceau se propage dans une direction aléatoire par rapport aux alignements des atomes du cristal, les ions ne sont pas canalisés ; (b) l'incidence du faisceau est réglée de façon à faire un petit angle ($|\psi| \leq \psi_c$ ou $|\psi| \approx \psi_c$) avec la direction des plans réticulaires (1,1,0) du cristal de silicium et les ions peuvent être canalisés entre les plans d'atomes (questions II.2 à II.5).

L'interaction des deutérons avec les noyaux de silicium est susceptible de provoquer la réaction nucléaire suivante :



On admet que les protons ${}^1_1\text{H}$ issus de cette réaction sortent directement du cristal sans avoir subi aucune interaction. Inversement les isotopes ${}^{29}_{14}\text{Si}$ produits sont arrêtés dans le cristal.

La section efficace de cette réaction est $\sigma_c = 2 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$. La différence entre la masse totale des deux noyaux réagissant et celle des noyaux produits correspond à une énergie $Q = 6,2 \text{ MeV}$.

Compte tenu de la valeur de Q, on peut se limiter aux expressions non relativistes des énergies et quantités de mouvement.

On se place d'abord hors canalisation (cas *a*). On admet qu'une très grande proportion des deutérons traversent le cristal sans déviation ni perte d'énergie.

1. Déduire des lois de conservation l'énergie cinétique des protons émis par la réaction ci-dessus dans la direction du détecteur. Montrer que l'énergie cinétique des atomes de silicium intervient peu dans le bilan d'énergie.
2. Le détecteur reçoit des protons issus de cette réaction, ainsi que des deutérons. Proposer un mécanisme responsable de la déviation de ces deutérons par rapport à la direction du faisceau incident. Donner un argument physique justifiant le fait que leur énergie est peu inférieure à l'énergie des deutérons incidents.
3. Calculer la fraction des deutérons du faisceau incident qui provoquent la réaction nucléaire. En déduire le nombre total de protons produits par unité de temps.

On règle maintenant l'angle d'incidence ψ de façon à se placer au voisinage de la condition de canalisation (cas *b*). la figure 4 montre la variation relative du nombre de protons comptés par le détecteur en fonction de l'angle ψ , la mesure étant normalisée à la moyenne obtenue hors canalisation.

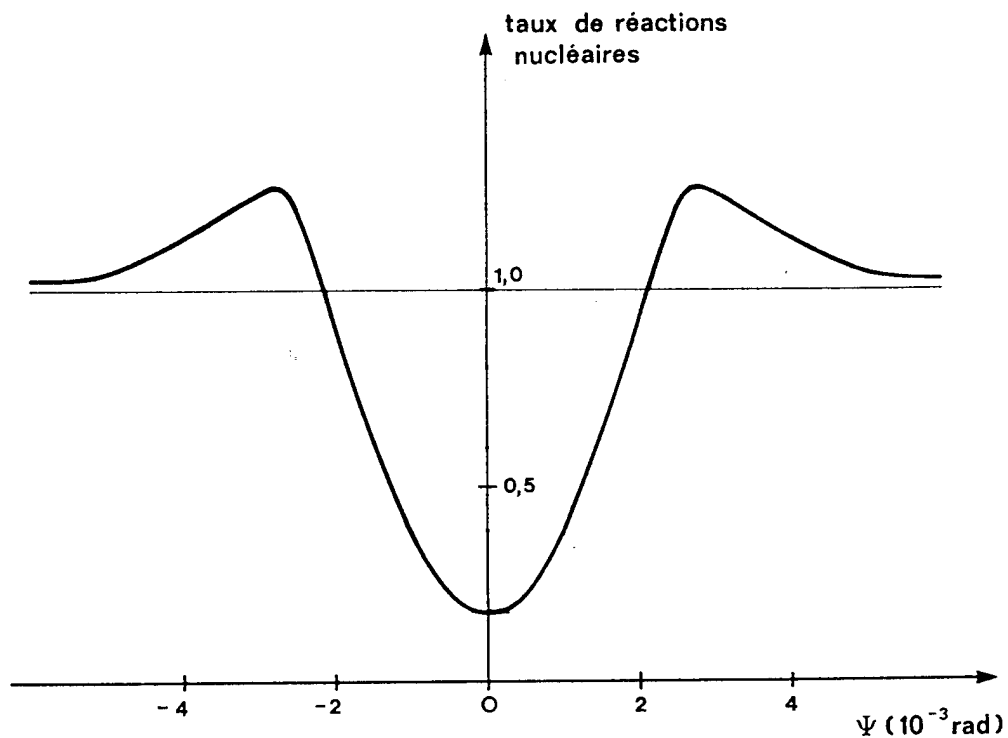


Figure 4

4. Montrer que cette courbe met en évidence le phénomène de canalisation. Comment peut-on en déduire une valeur approximative de l'angle critique ψ_c ? Expliquer qualitativement les raisons qui font que le signal n'est pas nul à $\psi \approx 0$.
5. Donner une interprétation des deux maxima pour lesquels le signal est supérieur à la moyenne obtenue hors canalisation.
6. Montrer que, pour des valeurs particulières de $|\psi|$ très supérieures à ψ_c , on peut prévoir l'existence d'autres minima, similaires à celui obtenu ici autour de $\psi = 0$, mais de profondeurs et largeurs différentes.

Déviation d'un faisceau d'ions par un cristal courbe.

On peut utiliser la canalisation pour dévier le faisceau d'ions ou pour le partager afin de l'envoyer sur plusieurs cibles. On utilise pour cela un monocristal assez mince et courbé. On considère dans ce qui suit deux plans réticulaires successifs du cristal faiblement déformés en deux surfaces cylindriques de même axe $y'\Omega y$ et de rayons $R - a$ et $R + a$, avec $a \ll R$. La géométrie est schématisée sur la figure 5. Un ion (masse m_i , charge $q_i = Z_i e$) est repéré entre ces deux surfaces d'atomes par ses coordonnées cylindriques notées r, y et ϕ , $r = R + \xi$ étant la distance de l'ion à l'axe $y'\Omega y$ (avec $|\xi| < a$). Pour chaque valeur de ϕ , les vecteurs de base correspondants e_r, e_y et e_ϕ forment un trièdre direct. La face d'entrée du cristal est située dans le plan $x\Omega y$ pour lequel $\phi = 0$. Le faisceau d'ions pénètre dans le cristal perpendiculairement à cette face, avec la vitesse $v_0 = v_0 e_\phi$.

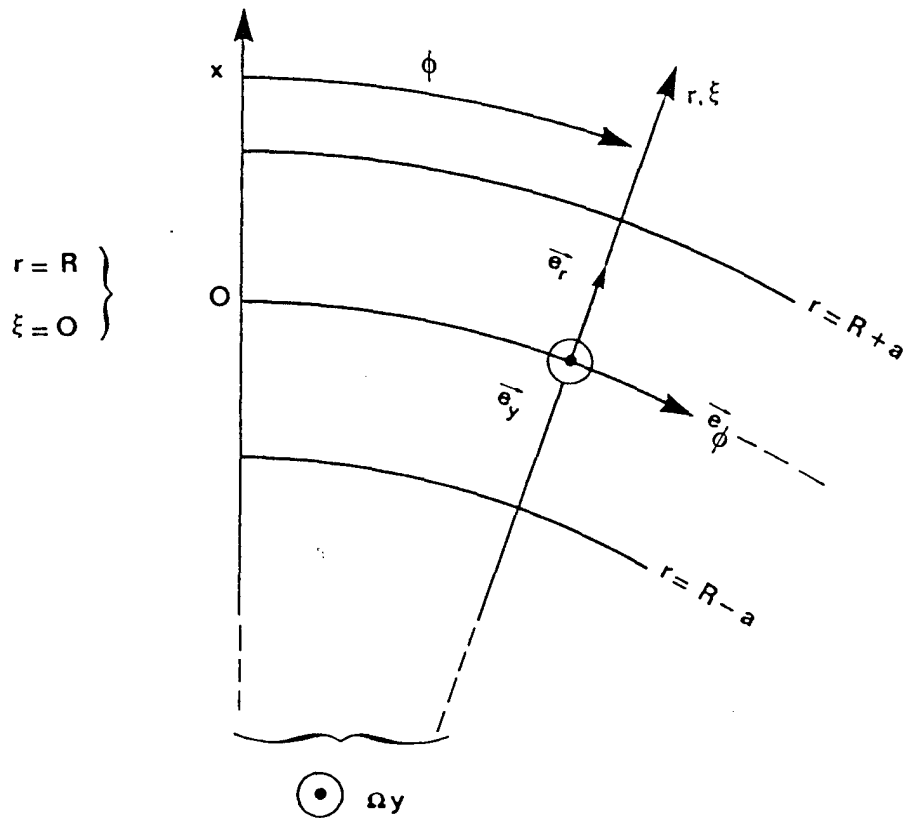


Figure 5

On admet que le champ électrique entre les deux surfaces $r = R \pm a$ est radial, de la forme $E = -K\xi e_r$, où K est la constante définie en I.6 et telle que $\frac{1}{2} Ka^2 = 40 \text{ V}$.

7. En utilisant les coordonnées cylindriques définies ci-dessus, écrire les équations du mouvement d'un ion du faisceau qui entre dans le cristal en $\xi = \xi_0$.
8. Éliminer la variable $\frac{d\phi}{dt}$ en utilisant une constante du mouvement, pour obtenir une équation différentielle vérifiée par la fonction $\xi(t)$. Simplifier cette équation grâce aux approximations qui s'imposent. Interpréter le terme supplémentaire par comparaison au cas d'une surface réticulaire plane (étudié en II.3);
9. Déterminer la solution $\xi(t)$ et la valeur moyenne ξ_1 de $\xi(t)$ sur le temps.

10. Exprimer en fonction de a et ξ_1 la condition que doit remplir ξ_0 pour que l'ion soit canalisé entre les deux surfaces $r = R \pm a$. Montrer qu'il existe pour R une limite R_m au-dessous de laquelle aucun ion n'est canalisé. On suppose dans la suite que $R > R_m$.
11. La dimension transversale du faisceau étant très grande devant la maille cristalline et très petite devant R , on peut considérer que les valeurs de ξ_0 sont aléatoirement distribuées entre $-a$ et $+a$ de façon équiprobable. Exprimer la fraction f des ions canalisés en fonction de R et R_m .
12. Calculer numériquement la valeur de R_m pour un faisceau de deutérons d'énergie 25 MeV/nucléon. Quelle est la fraction f d'ions canalisés si le cristal a un rayon de courbure $R = 2$ cm ?
13. Caractériser le champ magnétique B qui permettrait d'obtenir le même rayon de courbure pour la trajectoire des deutérons. Commenter le résultat.

PARTIE IV

RAPPELS DE CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE RELATIVISTES

Les résultats demandés dans cette partie seront utiles pour résoudre les questions des parties V et VI du problème. Le formalisme quadrivectoriel n'est pas nécessaire.

On appelle R_0 le référentiel galiléen du laboratoire. On y choisit un système d'axes orthonormés $Oxyz$ de vecteurs unitaires e_x, e_y, e_z . Soit R' un autre référentiel galiléen dont la vitesse de translation par rapport à R_0 , mesurée dans R_0 , est $\vec{v}_1 = v_1 e_z$.

On note $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} = (1 - \beta_1^2)^{-1/2}$.

On choisit dans R' un système d'axes $O'x'y'z'$ tels que les droites Oz et $O'z'$ coïncident et que Ox et Oy soient respectivement parallèles à Ox' et Oy' (fig. 6).

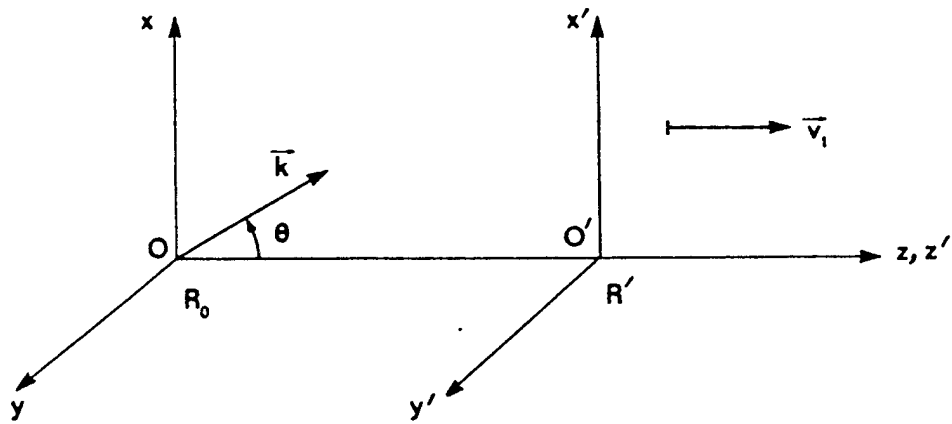


Figure 6

Transformation spéciale de Lorentz.

Les coordonnées d'un événement ponctuel sont (x, y, z, t) dans R_0 et (x', y', z', t') dans R' .

L'événement choisi pour origine à la fois dans R_0 et R' est la coïncidence de O et O' , avec par conséquent l'égalité des temps correspondants $t = t' = 0$.

On rappelle les formules de la transformation spéciale de Lorentz permettant d'exprimer x', y', z' et t' à partir de x, y, z et t , ainsi que les formules de la transformation inverse :

$$\begin{aligned} x' &= x & y' &= y & x &= x' & y &= y' \\ z' &= \gamma_1 (z - v_1 t) & & & z &= \gamma_1 (z' + v_1 t') \\ t' &= \gamma_1 (t - v_1 z/c^2) & & & t &= \gamma_1 (t' + v_1 z'/c^2) \end{aligned}$$

1. Montrer que la quantité $x^2 + y^2 + z^2 - ct^2$ est un invariant par la transformation de Lorentz.
2. Dans quelles conditions dit-on que $\Delta t'$ est un intervalle de temps propre ? Mettre alors en évidence la dilatation des durées dans le passage de R' à R_0 .
3. Montrer que si t est positif et $|z| < ct$, le temps t' est également positif et fonction croissante de t . Interpréter ce résultat.

Dynamique d'une particule relativiste.

4. Une particule de masse m a une vitesse v dans R_0 . Donner les expressions de sa quantité de mouvement p et de son énergie ϵ dans R_0 .

On notera $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Donner la relation entre ϵ , p^2 , m et c ne faisant pas intervenir explicitement γ . Donner aussi une relation liant p , ϵ , v et c .

5. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour une particule soumise à une force f dans R_0 . Comment s'exprime le théorème de l'énergie cinétique pour la particule relativiste? Exprimer la conservation de l'énergie mécanique dans le cas d'un champ de force permanent associé à une énergie potentielle $W(x, y, z)$.

Effet Doppler et aberration de la lumière.

Une onde électromagnétique plane progressive et sinusoïdale se propage dans le vide. Dans le référentiel R_0 sa pulsation est ω et son vecteur d'onde k . Le vecteur k est contenu dans le plan Oxz et fait un angle θ avec Oz .

6. Justifier le fait que la phase de l'onde en un lieu donné et à un instant donné est invariante si on passe du référentiel R_0 au référentiel R' . En déduire les expressions donnant la pulsation ω' et le vecteur d'onde k' de l'onde dans le référentiel R' , en fonction de ω , θ , v_1 et c .
7. Quel est le signe du décalage $\omega - \omega'$ quand la vitesse v_1 et le vecteur k sont de même sens ($k \cdot v_1 > 0$)? Montrer comment la relation entre ω et ω' se réduit à l'effet Doppler classique dans la limite non relativiste.
8. Soit θ' l'angle entre k' et $O'z'$ mesuré dans le référentiel R' . Exprimer $\cos \theta'$ et $\sin \theta'$ en fonction de ω , θ , v_1 et c .
9. Donner inversement les formules exprimant ω , $\sin \theta$, $\cos \theta$ en fonction de ω' , θ' , v_1 et c .
10. Interpréter la limite ultra-relativiste de θ dans le cas où la valeur de θ' est voisine de $\pi/2$.

PARTIE V

FAISCEAU DE POSITONS RELATIVISTES

Le faisceau est maintenant constitué de positons ultra-relativistes d'énergie comprise entre 100 MeV et 10 GeV. Les autres conditions de l'expérience sont les mêmes que dans la partie II.

On garde la géométrie schématisée sur la figure 2 et les mêmes notations, R_0 désignant le référentiel du laboratoire dans lequel le cristal est immobile.

On modélise le champ électrique entre les plans d'atome par la même expression que pour les ions positifs, c'est-à-dire $E(x, y, z) = -Kxe_x$, avec $U(a) = 40$ V.

V.A. Description du mouvement transversal du positon dans le référentiel R_0 .

A.1. On introduit les paramètres $A = eKa^2/m_e c^2$ et $\eta = (eK/m_e)^{1/2}$, où m_e est la masse du positon, égale à celle de l'électron. Donner une signification physique à A et η . Calculer leurs valeurs numériques.

A.2. On se propose de déterminer le mouvement dans R_0 d'un positon qui se trouve à l'instant $t = 0$ au point O , avec la vitesse $v_0 = v_0 \sin \psi e_x + v_0 \cos \psi e_z$.

$$\text{On pose : } \gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}.$$

Indiquer, avec justification, quelles sont les quantités conservées au cours du mouvement. Écrire les équations correspondantes.

A.3. Démontrer que la composante transverse p_x de la quantité de mouvement du positon vérifie toujours $|p_x(t)| \leq |p_x(0)|$. Quel potentiel maximum le positon peut-il atteindre compte tenu des conditions initiales ?

A.4. On pose $\delta = p_x(0)/m_e c$.

Montrer que la valeur maximum du potentiel que le positon peut atteindre, compte tenu des conditions initiales, est donnée par :

$$U_{\max} = \frac{m_e c^2}{e} [\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - \delta^2}].$$

A.5. Soit x_m la valeur maximale de $x(t)$. En faisant les approximations qui s'imposent, montrer que :

$$x_m^2 = \frac{a^2 \delta^2}{A \gamma_0},$$

puis exprimer x_m en fonction de A , a , γ_0 et ψ .

A.6. Donner la condition de canalisation du positon par une inégalité liant $|\delta|$, A et γ_0 . Montrer que cette condition équivaut à $|\psi| \leq \psi_c$ et donner l'expression de l'angle critique ψ_c .

A.7. Pour un faisceau d'énergie 100 MeV, calculer numériquement ψ_c et la valeur maximale de δ correspondante. Commenter.

A.8. Soit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ où v^2 est le carré de la vitesse du positon dans R_0 à l'instant t . Justifier la possibilité de confondre γ et γ_0 . Déterminer l'équation différentielle du mouvement transversal $x(t)$ et montrer qu'elle admet une solution sinusoïdale de pulsation ω . Exprimer ω en fonction de η et γ_0 . Donner l'expression de $x(t)$.

A.9. Évaluer ω et la fréquence correspondante pour un faisceau d'énergie 100 MeV.

A.10. Préciser les deux conditions que doivent vérifier $\left| \frac{dx}{dt} \right|$ d'une part et $|p_x|$ d'autre part, pour que le mouvement transversal du positon soit non-relativiste.

Montrer qu'elles sont réalisées dans le cas où $\delta^2 \ll 1$.

V.B. Mouvement longitudinal du positon et trajectoire dans le référentiel d'accompagnement.

B.1. À l'aide des lois de conservation, exprimer le rapport $\frac{v_z(t)}{v_0}$ en fonction de γ_0 , $\gamma(t)$ et $\cos \psi$, puis exprimer $\gamma(t)$ en fonction de A , γ_0 , a et x .

B.2. Exprimer $v_z(t)$ et donner sa valeur moyenne v_1 au cours du temps.

B.3. Écrire l'équation $z(t)$ du mouvement longitudinal du positon.

B.4. Représenter graphiquement les variations de $v_z(t)$ et $z(t)$.

B.5. Établir l'expression suivante du facteur relativiste γ_1 associé à la vitesse v_1 :

$$\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2} = \gamma_0 (1 + \delta^2/2)^{-1/2}.$$

Envisager les deux cas limites $\delta^2 \ll 1$ et $\delta^2 \gg 1$ que l'on peut réaliser avec des énergies différentes du faisceau de positons.

B.6. On repère maintenant le positon dans le référentiel R' en translation uniforme de vitesse $v_1 e_z$ par rapport au référentiel R_0 . On appelle x' et z' les coordonnées du positon dans le référentiel R' . Le temps mesuré dans R' est noté t' . Les origines des repères de R_0 et R' coïncident pour $t = t' = 0$ et $z = z' = 0$ (mêmes notations que dans la partie IV).

Exprimer les fonctions $x'(t)$ et $z'(t)$ en gardant pour paramètre le temps t du référentiel R_0 .

B.7. Représenter la forme de la trajectoire dans R' . Comparer la trajectoire obtenue dans les deux cas limites $\delta^2 \ll 1$ et $\delta^2 \gg 1$. Donner dans chaque cas le rapport z'_m/x'_m des amplitudes de variation de z' et x' .

B.8. À l'aide de la question IV.3, montrer que le paramétrage par le temps t du référentiel R_0 suffit à prévoir le sens de parcours de la trajectoire dans R' .

B.9. Montrer qu'un argument physique simple permet de prévoir le sens de la vitesse longitudinale dans R' au point où le déplacement transversal est maximum (on pourra raisonner à partir du référentiel R_0).

B.10. Dans le cas d'un faisceau de grande énergie pour lequel $\delta^2 \gg 1$ interpréter qualitativement la forme de la trajectoire d'après les forces qui s'exercent sur le positon dans R' .

B.11. Montrer que pour $\delta^2 \ll 1$ on peut assimiler t' à un temps propre. En déduire la pulsation ω' du mouvement dans R' et l'équation horaire $x'(t')$ de ce mouvement.

Montrer que dans ce cas le mouvement du positon dans R' est non-relativiste.

PARTIE VI

RAYONNEMENT DE CANALISATION DES POSITONS RELATIVISTES

On étudie le rayonnement de « canalisation », c'est-à-dire le rayonnement électromagnétique émis à grande distance par les positons canalisés dans le cristal dont le mouvement a été analysé précédemment dans la partie V.

On se place désormais dans le cas $\delta^2 \ll 1$. On peut ainsi négliger les variations de la vitesse du positon selon Oz et faire les approximations $v_1 \approx v_0$ et $\gamma_1 \approx \gamma_0$. On confond alors le référentiel d'accompagnement R' avec le référentiel en translation uniforme de vitesse $v_0 e_z$ par rapport au référentiel R_0 .

1. Le mouvement du positon dans R' étant décrit par l'équation $x'(t') = x_0 \cos \omega' t'$, donner ω' en fonction de ω , en utilisant les résultats de la partie IV.
2. On se place d'abord dans le référentiel R' . Montrer que les résultats obtenus dans la question V.B.11. justifient l'approximation dipolaire électrique pour le rayonnement émis par le positon et observé dans le référentiel R' . En déduire la pulsation de ce rayonnement dans ce référentiel.
3. On se place maintenant dans le référentiel R_0 du laboratoire pour observer le rayonnement des positons canalisés. En utilisant les résultats de la partie IV, donner la pulsation $\Omega(\theta)$ que l'on observe dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe Oz. Exprimer $\Omega(\theta)$ en fonction de ω , v_0 , c et θ .
4. Calculer numériquement ω' et la pulsation $\Omega(0)$ observée dans le référentiel R_0 dans la direction de l'axe Oz, pour le même faisceau de positons que précédemment (énergie 100 MeV), avec $\omega = 2,8 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$.

À quel domaine du spectre la pulsation $\Omega(0)$ appartient-elle ?

On se propose d'étudier plus précisément la puissance rayonnée par les positons dans le référentiel R' . Soit $a'(t')$ l'accélération dans R' d'un positon canalisé, situé au voisinage du point O' fixe dans R' . On rappelle que le rayonnement dipolaire produit en un point M à assez grande distance de O' , a localement la structure d'une onde plane se propageant dans la direction de $r' = \overline{O'M}$ et que le champ magnétique $B'(r', t')$ en M est donné par :

$$B'(r', t') = \frac{\mu_0}{4\pi cr'} e a'(t' - r'/c) \wedge \frac{r'}{r'} \quad r' = \|r'\|.$$

On repère la position de M dans R' par ses coordonnées sphériques d'axe polaire $O'x'$, c'est-à-dire r' , $\phi' = (\overline{O'x'}, r')$ et $\chi' = (\overline{O'y'}, \overline{O'm})$, selon le schéma de la figure 7. On veillera à ne pas confondre ϕ' avec $\theta' = (\overline{O'z'}, r')$.

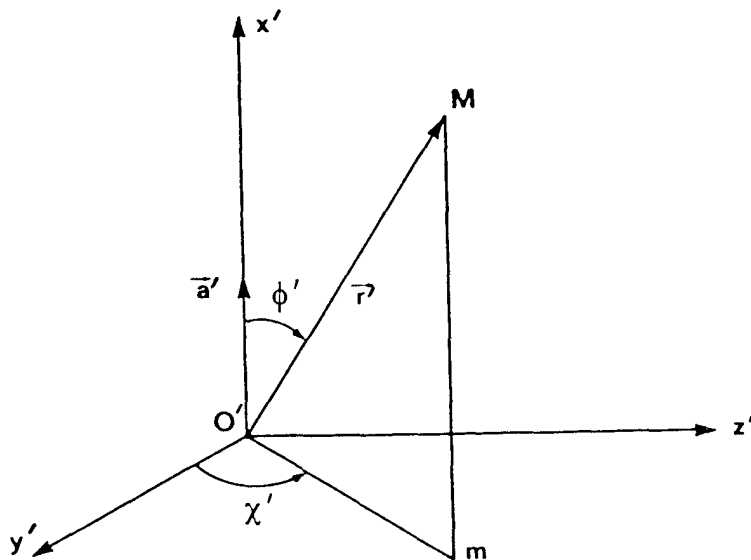


Figure 7

5. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting \mathbf{S}' en M dans le référentiel R' , ainsi que la puissance moyenne totale P' rayonnée par le positon dans ce référentiel.
6. Quelle est la fraction de la puissance P' émise dans des directions $O'M$ telles que $\pi/6 < \phi' < 5\pi/6$, où ϕ' est l'angle que fait la direction $O'M$ avec l'axe $O'x'$ (fig. 7) ?
7. En se limitant au plan $O'x'z'$, déterminer dans R_0 le domaine des angles θ que font avec Oz les directions correspondant au domaine précédemment délimité dans R' par $\pi/6 < \phi' < 5\pi/6$.
Qu'en déduit-on sur la directivité du rayonnement du positon observé dans R_0 ?