

ÉLECTROMAGNÉTISME

Préambule

Ce sujet comporte deux parties indépendantes :

- La première partie porte sur quelques aspects fondamentaux de l'électromagnétisme, notamment sur l'approximation des régimes quasi-stationnaires et ses conséquences sur la simplification des équations fondamentales de l'électromagnétisme.
- La deuxième partie est dédiée à l'étude de la propagation guidée dans un câble coaxial.

Chaque partie comporte de nombreuses questions indépendantes. Le candidat peut utiliser un résultat donné par le texte même s'il n'a pas été démontré.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

FORMULAIRE

Opérateurs vectoriels

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{C}) - \Delta\vec{C}$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

$$\text{div}\vec{C} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rC_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{C} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial C_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Première Partie
Quelques aspects fondamentaux de l'électromagnétisme

A. Des équations de Maxwell.

- I. Voici quelques-uns des plus éminents artisans de l'électromagnétisme classique : Coulomb, Ampère, Faraday, Maxwell, Hertz, Lorentz. Rappeler **brèvement** une des contributions de chacun à la construction de l'électromagnétisme.
- II. Énoncer les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants. Pour chacune d'entre elles, en donner la forme intégrale. Suffisent-elles à rendre compte de tous les phénomènes électromagnétiques ? Si non, que faut-il leur adjoindre ?

B. De l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires

L'objet de cette partie est de dégager précisément ce que recouvre l'approximation des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme (notée dorénavant ARQS). On commence par l'étude d'un exemple simple : la détermination du champ électromagnétique dans un condensateur plan en régime sinusoïdal forcé.

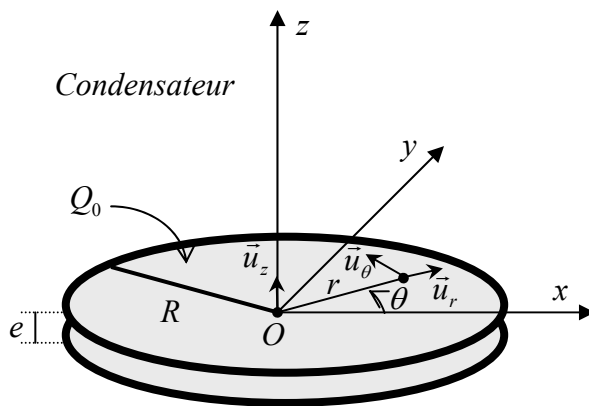


Figure 1. a

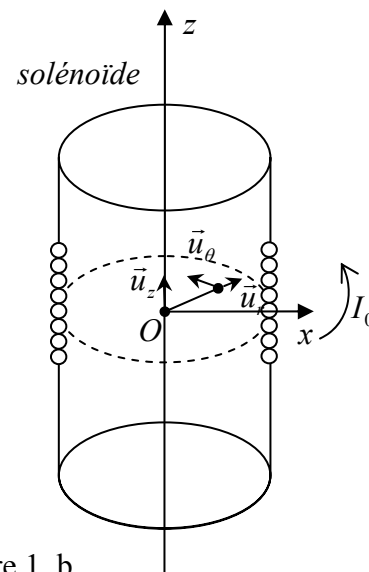


Figure 1. b

I. Condensateur plan en régime sinusoïdal forcé : première approche.

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures planes de forme circulaire, d'axe Oz et de rayon R , distantes de e (figure 1. a). L'espace interarmatures est vide et la charge totale stockée sur l'armature supérieure du condensateur est donnée par : $Q(t) = Q_0 \exp(i\omega t)$, en notation complexe (Q_0 réel positif). On suppose que $R \gg e$, de sorte que l'on négligera tout effet de bord. Vu la géométrie du problème, on travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz .

On s'intéresse ici à un régime non stationnaire de fonctionnement, en l'occurrence un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . On se propose ici de déterminer le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ dans le condensateur par résolution directe d'une équation dans laquelle le couplage entre le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} a disparu.

1. **a.** Par une analyse des symétries et invariances du problème, déterminer la forme a priori du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ entre les armatures.

Evaluer l'ordre de grandeur du rapport $\left| \frac{E_r}{E_z} \right|$ en supposant momentanément et en première approximation que $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$.

Le fait de « négliger les effets de bords » signifie ici que $\left| \frac{E_r}{E_z} \right| \ll 1$, ce qu'on supposera dorénavant.

1. **b.** Justifier qu'il est légitime, compte tenu des hypothèses faites, de chercher le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ sous la forme :
$$\begin{cases} \vec{E} = E(r, t) \vec{u}_z \\ \vec{B} = B(r, t) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

2. Montrer à partir des équations de Maxwell que la fonction $E(r, t)$ vérifie entre les

armatures l'équation :
$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$
.

3. On cherche des solutions complexes de la forme : $\underline{E}(r, t) = E_0 e(r) \exp(i\omega t)$, où ω est la pulsation des oscillations et $e(0) = 1$. Etablir l'expression du champ du champ magnétique complexe $\underline{B}(r, t)$ en fonction de $e(r)$ en utilisant l'équation de Maxwell appropriée.

4. On définit la variable réelle $u = \frac{\omega r}{c}$. Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $e(u)$, **qu'on ne cherchera pas à résoudre**. La solution de cette équation s'écrit :

$$e(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{u}{2} \right)^{2k}$$

5. On désire maintenant trouver le développement perturbatif du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ à l'intérieur du condensateur. Alors que précédemment, nous sommes partis d'une équation aux dérivées partielles éliminant le couplage entre \vec{E} et \vec{B} , nous cherchons ici une solution faisant apparaître ce couplage comme le cœur du problème. Bien évidemment, la forme du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ est la même que précédemment (voir B.I.1b), puisque les hypothèses sont les mêmes. En particulier, les effets de bord sont négligés. Pour plus de commodité nous travaillons, comme ci-dessus, en notation complexe. L'idée fondamentale du traitement est la suivante : à l'ordre le plus bas le champ électrique entre les armatures est approximativement uniforme (comme en électrostatique) soit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_0 = E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_z$, où E_0 est réel. Mais ce champ $\underline{\vec{E}}_0 = E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_z$ varie au cours du temps ; par conséquent, il crée un champ magnétique : $\underline{\vec{B}}_1 = \underline{B}_1(r, t) \vec{u}_\theta$. Ce champ $\underline{\vec{B}}_1 = \underline{B}_1(r, t) \vec{u}_\theta$ engendre à son tour un champ

électrique $\vec{E}_2 = E_2(r,t)\vec{u}_z$, qui crée lui-même un champ magnétique $\vec{B}_3 = B_3(r,t)\vec{u}_\theta$ qui engendre $\vec{E}_4 = E_4(r,t)\vec{u}_z \dots$ etc... Les termes de rang plus élevé sont des termes correctifs par rapport aux termes de rang plus bas : cette méthode itérative est qualifiée de « perturbative ».

a. Partant de la première expression approchée du champ électrique $\vec{E}_0 = E_0 \exp(i\omega t)\vec{u}_z$, calculer le champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1(r,t)\vec{u}_\theta$ par application de l'équation de Maxwell-Ampère.

b. La présence du champ magnétique modifie le champ électrique : le champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1(r,t)\vec{u}_\theta$ engendre un terme correctif $\vec{E}_2 = E_2(r,t)\vec{u}_z$ pour le champ électrique. De quel phénomène s'agit-il ? A l'aide de l'équation de Maxwell appropriée, calculer ce terme correctif $\vec{E}_2 = E_2(r,t)\vec{u}_z$. On ne retiendra que la solution nulle sur l'axe : pourquoi ?

c. Répéter ce développement pour aboutir à $\vec{B}_3 = B_3(r,t)\vec{u}_\theta$ puis $\vec{E}_4 = E_4(r,t)\vec{u}_z$.

d. Montrer alors que l'expression du champ électrique complexe $\underline{E}(r,t)$ à l'ordre 4 en $\frac{\omega r}{c}$ est donnée par : $\underline{E}(r,t) = E_0 \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 + \dots \right) \exp(i\omega t)$ et en déduire le développement limité de la fonction $e(u)$ à l'ordre 4.

e. Montrer que l'expression du champ magnétique complexe $\underline{B}(r,t)$ à l'ordre 3 en

$$\frac{\omega r}{c} \text{ est : } \underline{B}(r,t) = iB_0 \left(\frac{\omega r}{2c} - \frac{1}{16} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^3 + \dots \right) \exp(i\omega t).$$

f. Etablir les expressions des amplitudes réelles E_0 et B_0 en fonction des paramètres du condensateur et les contraintes appliquées.

g. Commenter les expressions de $\underline{E}(r,t)$ et $\underline{B}(r,t)$ obtenues aux questions **d.** et **e.** en lien avec le résultat de la question **4.**

II. Solénoïde infini en régime sinusoïdal forcé.

On cherche ici à déterminer le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ créé par un solénoïde infini parcouru par une intensité $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$ en notation complexe (I_0 réel positif), comportant n spires jointives par unité de longueur, de section circulaire (figure 1.b).

1. Qu'entend-on par l'expression « solénoïde infini » ? Justifier qu'il est légitime, compte tenu des hypothèses faites, de chercher le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ sous la

$$\text{forme : } \begin{cases} \vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = B(r,t)\vec{u}_z \end{cases}.$$

2. Trouver l'équation à laquelle obéit $B(r,t)$ et montrer qu'elle est analogue à celle obtenue pour $E(r,t)$ dans le cas du condensateur (B.I.2.) .

3. Déduire sans calcul de la partie I que $\underline{B}(r,t) = B_0 e^{i\omega t}$ ainsi que les expressions approchées des champs électromagnétiques complexes $\underline{B}(r,t)$ et $\underline{E}(r,t)$.
4. Etablir l'expression de B_0 et de E_0 en fonction de I_0 , E_0 étant l'amplitude réelle du champ électrique.

III. Considérations énergétiques en régime lentement variable

On fait maintenant l'hypothèse d'un régime « lentement variable », c'est-à-dire que l'on suppose que $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ dans toutes les expressions calculées ci-dessus. On supposera négligeables tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans l'expression des champs.

1. Evaluer en ordre de grandeur le domaine de fréquences correspondant à cette approximation pour les composants utilisés usuellement en montage d'électricité ou d'électronique.
2. Donner l'expression du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ à l'ordre le plus bas en $\frac{\omega r}{c}$ pour le condensateur d'une part, et pour le solénoïde d'autre part. Que peut-on dire, en ordre de grandeur, du rapport $\left| \frac{E}{cB} \right|$ pour $\frac{\omega r}{c} \ll 1$ dans le condensateur et le solénoïde ? Quel est le sens physique de ce résultat ?
3. Dans chacun de ces deux cas, donner l'expression de la densité volumique instantanée d'énergie électromagnétique $u_{em}(r,t)$ pour $\frac{\omega r}{c} \ll 1$. Quelle approximation est-il légitime de faire dans l'expression de $u_{em}(r,t)$, selon qu'il s'agit d'un condensateur ou à un solénoïde ? En comparant les expressions obtenues au cas de la densité d'énergie d'une onde électromagnétique dans le vide progressive plane, harmonique de pulsation ω , lequel des deux systèmes, parmi le condensateur et le solénoïde, qualifieriez-vous de système à dominante électrique ? magnétique ?
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r,t)$ dans le condensateur et dans le solénoïde, toujours pour $\frac{\omega r}{c} \ll 1$.
5. Effectuer un bilan énergétique global sur la zone d'espace correspondant à l'intérieur du condensateur d'une part, du solénoïde d'autre part. Commenter.

IV. L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires : premier contact.

1. Dans l'hypothèse des régimes lentement variables énoncée et étudiée ci-dessus ($\frac{\omega r}{c} \ll 1$), déduire de ce qui précède que l'équation de Maxwell-Faraday pour un système « à dominante électrique » s'écrit de manière approchée sous la forme : $\overline{rot \vec{E}} = \vec{0}$. Que peut-on dire de l'équation de Maxwell-Ampère ?
2. De même, pour un système « à dominante magnétique », donner l'expression convenable des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère en régime lentement variable. Commenter.

3. Peut-on définir sans ambiguïté « l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires » et formuler les équations de Maxwell de manière unique dans le cadre de cette approximation ?

V. Potentiels retardés. Définition de l'ARQS.

Nous nous proposons ici de donner la définition générale de l'ARQS avant d'envisager l'existence de deux limites « électrique » et « magnétique » de cette approximation, limites entrevues précédemment.

Soit une distribution de charges et de courants $[\rho, \vec{j}]$ de volume fini \mathcal{V} . Cette distribution-source crée dans tout l'espace un champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ régi par les équations de Maxwell.

1. Pourquoi peut-on définir un potentiel vecteur \vec{A} et un potentiel scalaire V (formant le couple $[V, \vec{A}]$) dont dérive le champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$? Donner l'expression de $[\vec{E}, \vec{B}]$ en fonction de $[V, \vec{A}]$.
2. Pourquoi le couple $[V, \vec{A}]$ n'est-il pas défini de manière unique ? On utilise alors cette indétermination et on choisit d'imposer au couple $[V, \vec{A}]$ la condition de jauge de Lorentz. Donner la relation liant \vec{A} et V correspondant à la jauge de Lorentz.
3. Démontrer, en jauge de Lorentz, les équations de propagation des potentiels V et \vec{A} . Leur solution dite « des potentiels retardés » s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d^3\vec{r} \\ \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c}\right)}{PM} d^3\vec{r} \end{array} \right. , \text{ où } M \text{ est un point où l'on évalue les potentiels et}$$

P désigne un point courant de la distribution-source de volume \mathcal{V} .

4. Soit τ le temps caractéristique d'évolution des sources $[\rho, \vec{j}]$, et soit L l'ordre de grandeur caractéristique de la distance PM . On construit alors le nombre sans dimension $\alpha = \frac{L}{c\tau}$. Quel est le sens physique et la dimension de la grandeur $\frac{L}{c}$?

Par définition, l'ARQS consiste à supposer $\alpha \ll 1$. Est-ce le cas dans un montage d'électricité ou d'électronique usuel ? Dans le cas du transport de courant par ligne à haute tension ? Dans le cas du transport d'un signal TV dans un câble d'antenne à une fréquence de 500MHz par exemple ? Dans le cas du domaine de l'optique visible ?

5. Donner l'expression approximative des potentiels $[V, \vec{A}]$ dans l'ARQS. En déduire les équations locales « de Poisson » liant les sources $[\rho, \vec{j}]$ aux potentiels $[V, \vec{A}]$.

VI. Les deux limites de l'ARQS.

Nous venons de définir l'ARQS par la condition : $\alpha \ll 1$ avec $\alpha = \frac{L}{c\tau}$, L désignant la distance typique entre le point de mesure et la distribution-source, et τ le temps caractéristique d'évolution des sources $[\rho, \vec{j}]$.

Cependant, nous avons constaté sur l'exemple du condensateur plan et du solénoïde en régime sinusoïdal que l'ARQS ne se manifeste pas de la même manière selon que le système est à dominante électrique ou magnétique. Nous allons ici mettre en évidence de manière générale l'existence de deux limites « électrique » et « magnétique » de cette approximation.

Nous noterons dans toute cette partie $\tilde{\rho}$, \tilde{j} , \tilde{E} , \tilde{B} , \tilde{V} et \tilde{A} les ordres de grandeur respectifs de $|\rho|$, $\|\vec{j}\|$, $\|\vec{E}\|$, $\|\vec{B}\|$, $|V|$ et $\|\vec{A}\|$.

Soit $d \leq L$, la distance typique sur laquelle varient les champs $[\vec{E}, \vec{B}]$ et les potentiels $[V, \vec{A}]$.

Outre le nombre sans dimension ε déjà introduit, nous définissons un autre nombre sans dimension : $\beta = \frac{\tilde{j}}{c\tilde{\rho}}$.

1. Montrer que β est bien sans dimension. Donner l'ordre de grandeur de \tilde{V} et \tilde{A} en fonction notamment de $\tilde{\rho}$, \tilde{j} , V (volume de la distribution-source) et L . En déduire l'expression du rapport $\frac{c\tilde{A}}{\tilde{V}}$ en fonction de β .

2. Régime quasi-stationnaire électrique.

Considérons une situation quasi-stationnaire ($\alpha \ll 1$) où l'effet des charges est beaucoup plus important que celui des courants ($\beta \ll 1$).

a. Comparer en ordre de grandeur $-\overrightarrow{grad} V$ et $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. En déduire l'expression approchée du champ électrique \vec{E} ainsi que la forme approchée que prend l'équation de Maxwell-Faraday sous ces hypothèses. Commenter.

b. Que peut-on dire de l'équation de Maxwell-Ampère ?

c. Evaluer le rapport $\frac{c\tilde{B}}{\tilde{E}}$ et dire pourquoi cette situation est qualifiée de limite « électrique ».

d. Peut-on simplifier l'écriture de la condition de jauge de Lorentz dans cette limite électrique de l'ARQS ? Si oui comment ?

e. Peut-on simplifier l'équation locale de conservation de la charge dans cette limite électrique de l'ARQS, et comment ? Commenter.

3. En supposant seulement que la condition $\alpha \ll 1$ est remplie, montrer que :

$$\text{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right).$$

4. Régime quasi-stationnaire magnétique.

Considérons maintenant une situation quasi-stationnaire ($\alpha \ll 1$) où l'effet des charges est beaucoup plus faible que celui des courants ($\beta \gg 1$).

a. Comparer en ordre de grandeur $-\frac{1}{c^2} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \right)$ et $\mu_0 \vec{j}$. En déduire la forme approchée

que prend l'équation de Maxwell-Ampère sous ces hypothèses. Commenter.

b. Que peut-on dire de l'équation de Maxwell-Faraday ? Comment s'exprime le champ \vec{E} en fonction des potentiels, sous ces hypothèses ?

c. Evaluer le rapport $\frac{\vec{E}}{c\vec{B}}$ et dire pourquoi cette situation est qualifiée de limite

« magnétique ».

d. Que peut-on dire de la condition de jauge de Lorentz dans cette limite magnétique de l'ARQS ? Commenter.

e. Que peut-on dire de l'équation locale de conservation de la charge dans cette limite magnétique de l'ARQS ? Commenter.

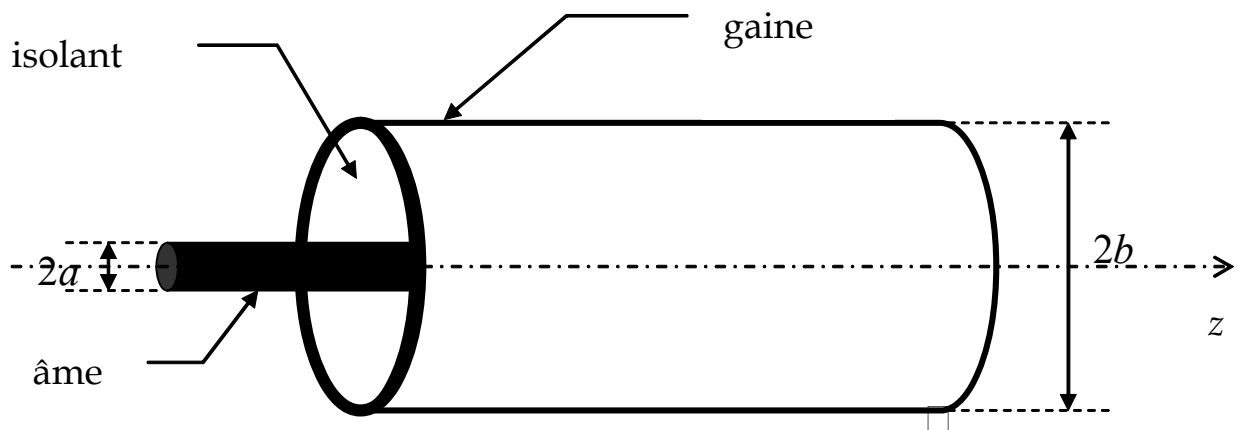
5. Laquelle de ces deux limites de l'ARQS est la plus fréquente expérimentalement et est la plus connue ? Pour quelle raison fondamentale ?

Deuxième Partie

Propagation guidée dans un câble coaxial

L'objet de cette Deuxième Partie est l'étude théorique et expérimentale des phénomènes de propagation dans un câble coaxial. Celui-ci est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux de section circulaire, de rayons respectifs a et b ($a < b$) de très grande longueur, séparés par un isolant. Le cylindre central (« l'âme ») est plein tandis que le cylindre extérieur (« la gaine ») est creux (figure 2):

Figure 2



Les dimensions du câble sont les suivantes : $a = 0,43$ mm et $b = 1,47$ mm.

L'isolant est un milieu diélectrique non magnétique de permittivité diélectrique relative constante $\epsilon_r = 2,25$. On travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz , Oz étant l'axe du câble coaxial.

Après un rappel de quelques unes des propriétés de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique (partie A), nous chercherons un modèle électrocinétique simple permettant de rendre compte des phénomènes de propagation observés jusqu'à des fréquences de l'ordre de quelques dizaines de MHz (partie B) dans le câble coaxial. Ce modèle est fondé sur une hypothèse particulière relative à la structure du champ électromagnétique $[\vec{E}, \vec{B}]$ se propageant dans l'isolant occupant l'espace interconducteurs. Son étude fait l'objet de la partie **B**.

A. Préambule : Propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique infini

On s'intéresse dans cette partie A. au champ électromagnétique à l'intérieur d'un diélectrique infini.

- I.** Rappeler les quatre équations de Maxwell reliant \vec{E} , \vec{D} et \vec{B} aux densités de charge libres ρ_{lib} et de courant libre \vec{j}_{lib} dans le diélectrique, \vec{D} étant le vecteur déplacement électrique dans le milieu.

2. Le milieu diélectrique est supposé parfait, linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique relative ϵ_r , indépendante de la fréquence. Ecrire la relation reliant \vec{E} et \vec{D} . En déduire l'écriture des quatre équations de Maxwell impliquant \vec{E} et \vec{B} uniquement (sans faire intervenir \vec{D}). Que deviennent-elles en absence de charges et de courants libres?

3. Montrer que des ondes planes de la forme $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - kz) \end{cases}$ peuvent se propager

dans ce type de milieu. $\vec{k} = k \vec{u}_z$ est le vecteur d'onde dont on déterminera le module k . Caractériser la structure de ces ondes planes.

B. Mode TEM d'un câble coaxial : étude théorique et expérimentale

On aborde maintenant l'étude de la propagation le long du câble coaxial. On suppose ici que le champ électromagnétique dans le milieu isolant occupant l'espace interconducteurs est de

la forme $\begin{cases} \vec{E} = E_0(r, z) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_r \\ \vec{B} = B_0(r, z) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_\theta \end{cases}$

Cela revient à considérer une solution particulière des équations de Maxwell, dite « mode Transverse Electrique et Magnétique » se propageant suivant l'axe Oz avec un vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}_z$.

I. Etude du mode TEM dans le cas d'un câble idéal.

On suppose en outre dans les seules parties I, II et III que les conducteurs sont parfaits.

1. En quoi consiste le modèle du conducteur parfait? Qu'est-ce que cela implique relativement aux charges et aux courants?

Les fonctions $E_0(r, z)$ et $B_0(r, z)$ doivent-elles satisfaire des conditions aux limites particulières en $r = a$ et $r = b$? On justifiera la réponse.

Justifier que, moyennant l'hypothèse des conducteurs parfaits, les deux fonctions $E_0(r, z)$ et $B_0(r, z)$ sont en fait indépendantes de la variable z .

Le champ électromagnétique complexe dans le milieu isolant entre les deux conducteurs s'écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0(r) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_r \\ \vec{B} = B_0(r) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$E_0(r)$ et $B_0(r)$ sont supposés réels.

2. Pourquoi cette solution particulière est-elle nommée « mode Transverse Electrique et Magnétique »? Donner la relation de structure liant le champ magnétique \vec{B} et le champ électrique \vec{E} ? Commenter.

3. En utilisant l'équation de Maxwell adéquate, montrer que $E_0(r) = E_a \frac{a}{r}$, où E_a est l'amplitude du champ électrique en $r = a$. En déduire l'expression de $B_0(r)$.
4. Calculer la vitesse de phase v_ϕ de cette onde en fonction notamment de la permittivité relative ϵ_r du milieu. Y a-t-il dispersion ?
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie instantanée dans le diélectrique. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.
6. Calculer la puissance moyenne se propageant le long du câble.

II. Grandeurs électrocinétiques caractéristiques du câble idéal dans le mode TEM.

On se propose de montrer ici que le câble coaxial idéal utilisé dans son mode TEM peut être modélisé de manière simple en définissant un certain nombre de grandeurs électrocinétiques.

1. En intégrant l'équation de Maxwell-Ampère le long d'un contour judicieusement choisi, montrer que l'âme est parcourue par un courant d'intensité complexe $\underline{I}(z, t)$ que l'on exprimera. Calculer l'intensité complexe du courant parcourant la gaine. Commenter le résultat obtenu.
2. A z et t fixés, on définit la tension (complexe) $\underline{U}(z, t)$ entre l'âme et la gaine par la relation : $\underline{U}(z, t) = - \int_{\text{gaine}}^{\text{âme}} \vec{E}(r, z, t) \cdot d\vec{l}$, où l'on fait circuler le champ électrique (complexe) le long d'une courbe contenue dans le plan de cote z fixée.
Montrer que $\underline{U}(z, t)$ est indépendante du chemin d'intégration choisi et la calculer. Pour autant, peut-on dire que le champ électrique \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire $V(r, z, t)$? On motivera la réponse.
3. Calculer le rapport $Z_C = \frac{\underline{U}(z, t)}{\underline{I}(z, t)}$. Que remarque-t-on ? Effectuer l'application numérique.
Comment appelle-t-on cette grandeur ? Pouvez-vous citer d'autres exemples en physique ondulatoire où ce type de grandeur apparaît ?
4. Considérons maintenant une portion de câble comprise entre les cotes z et $z + dz$. On choisit dz suffisamment petit pour pouvoir considérer que la portion de longueur dz est localement dans l'ARQS. Peut-on parler ici de limite électrique ou magnétique de l'ARQS ? On justifiera la réponse.
5. Calculer l'énergie magnétique $dU_{\text{mag}}(z, t)$ contenue dans la portion de câble de longueur dz . En déduire une définition et l'expression de l'inductance propre linéique Λ du câble. Application numérique.

6. De même, calculer l'énergie $dU_{\text{elec}}(z, t)$ contenue dans le champ électrique régnant l'isolant de la portion de câble. En déduire une définition et l'expression de la capacité linéique Γ du câble. Application numérique.
7. Exprimer Z_C en fonction de Λ et Γ .

III. Modèle électrocinétique à constantes réparties et aspects expérimentaux.

1. Proposer un schéma électrocinétique équivalent à la portion de câble comprise entre les abscisses z et $z + dz$ considérée dans la partie II. On fera apparaître sur le schéma les grandeurs : $U(z, t)$, $U(z + dz, t)$, $I(z, t)$ et $I(z + dz, t)$, et on exprimera les dipôles électrocinétiques intervenant dans la modélisation en fonction de Λ et Γ .
2. Ecrire les deux équations aux dérivées partielles couplant les variations spatiales et temporelles de $U(z, t)$ et $I(z, t)$. En déduire l'équation de propagation régissant $U(z, t)$ et $I(z, t)$. Donner l'expression et la valeur numérique de la célérité v des ondes de tension et de courant ? Commenter.

3. Propagation d'une impulsion de tension le long du câble :

On connecte le câble coaxial en $z = 0$ à un générateur d'impulsions dont l'impédance interne est résistive et vaut : $R_g = 50 \Omega$. On dispose d'un potentiomètre de résistance variable de valeur R_C que l'on connecte à l'autre extrémité du câble en $z = L$ ($L = 100$ m).

- a) Ecrire la condition aux limites en $z = L$. Calculer le coefficient de réflexion en $z = L$ pour l'onde de tension en fonction de Z_C et R_C .
- b) Quel est l'intérêt d'utiliser un générateur dont l'impédance interne vaut $R_g = 50 \Omega$?
- c) On observe la tension en $z = 0$ au moyen d'un oscilloscope. On suppose les impulsions périodiques de période $T = 5 \mu\text{s}$ et de durée $\tau \ll \frac{2L}{v} < T$. Qu'observe-t-on à l'écran dans les trois cas suivants :
 - (i) $R_C = 50 \Omega$;
 - (ii) l'extrémité $z = L$ du câble est en circuit ouvert ;
 - (iii) on court-circuite l'extrémité $z = L$ du câble.

On fera un schéma correspondant à chaque cas.

- d) On se place dans le cas (ii) précédent et on mesure un intervalle de temps $\Delta t = 1025$ ns entre le premier pic et le second pic appartenant au même « train » d'impulsions. En déduire la valeur expérimentale de v . Comparer à la valeur prévue par la théorie.

4. Ondes stationnaires sinusoïdales.

On alimente maintenant le câble en $z = 0$ par un générateur de signaux sinusoïdaux dont l'impédance interne vaut toujours $R_g = 50 \Omega$. On considérera ici que l'extrémité $z = L$ du câble est soit en circuit ouvert, soit en court-circuit.

a) Circuit ouvert.

Le câble étant en circuit ouvert en $z = L$, montrer que l'onde de tension est de la forme : $U(z, t) = V_0 \cos(k(z - L))\cos(\omega t - kL)$. Donner l'expression de l'onde de courant $I(z, t)$. Commenter ce résultat.

On fait varier la fréquence de la source et on observe la tension en $z = 0$ à l'aide d'un oscilloscope. On constate alors que l'amplitude de celle-ci est maximale aux fréquences suivantes :

fréquence f(MHz)	0,94	1,93	2,88	3,92	4,82	5,84	6,82
------------------	------	------	------	------	------	------	------

Interpréter qualitativement et quantitativement ces observations.

b) Court-circuit.

Le câble est maintenant court-circuité en $z = L$. Donner l'expression de l'onde de tension $U(z, t)$ et de l'onde de courant $I(z, t)$.

On procède comme précédemment, et on observe des maxima d'amplitude en $z = 0$ aux fréquences suivantes :

fréquence f(MHz)	0,55	1,44	2,44	3,58	4,36	5,53	6,30
------------------	------	------	------	------	------	------	------

Interpréter qualitativement et quantitativement ces observations.

c) A partir des mesures effectuées ci-dessus, pouvez-vous proposer une méthode de mesure de la célérité v des ondes dans le câble ? Application numérique.

IV. Pertes dues aux conducteurs.

On se propose ici de prendre en compte l'amortissement des ondes se propageant le long du câble du fait que les conducteurs ne sont pas idéaux : en effet, la conductivité n'étant pas infinie, le champ électromagnétique pénètre dans les conducteurs et les courants ne sont pas superficiels, donnant lieu à une dissipation d'énergie par effet Joule.

1. Effet de peau dans les métaux

Rappeler qualitativement les phénomènes physiques qui ont lieu quand une onde électromagnétique arrive sur une surface métallique. Comment varie l'amplitude d'une onde se propageant dans un métal (on n'effectuera aucun calcul) ? Qu'est-ce que l'effet de peau ? Comment varie l'épaisseur caractéristique δ de cet effet en fonction de σ , conductivité du métal et de ω , pulsation de l'onde ?

2. Distribution du courant dans un fil conducteur cylindrique.

Afin de quantifier les pertes par effet Joule dans le câble coaxial, on commence par s'intéresser à la répartition de la densité de courant et du champ électrique dans un simple fil conducteur plein et cylindrique, ayant une conductivité σ , un rayon a et une grande longueur. Le fil transporte (dans l'ARQS) un courant d'intensité complexe :

$I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$. On cherche à déterminer $\vec{E}(r, t) = E(r) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$ et $\vec{j}(r, t) = j(r) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$ à l'intérieur du fil.

a) On donne la conductivité du cuivre : $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle approximation peut-on faire concernant la densité de courant de déplacement et la densité de courant de conduction dans le métal ? Jusqu'à quelle fréquence cette approximation est-elle justifiée ? Commenter. Dorénavant, on suppose cette approximation valide.

b) Montrer que $E(r)$ est régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = i\mu_0 \sigma \omega E(r).$$

c) On suppose que dans le cuivre et aux fréquences de travail (~ 10 MHz) $\delta \ll a$. Quelle nouvelle approximation peut-on raisonnablement faire dans l'équation précédente ? En déduire que le champ électrique s'écrit, dans le conducteur :

$$\vec{E}(r, t) \approx \frac{1+i}{2\pi a \sigma \delta} I_0 \exp\left(-\frac{a-r}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right)\right] \vec{u}_z,$$
 où l'expression de δ est à déterminer.

d) Calculer numériquement δ . L'hypothèse précédente est elle justifiée ?

e) Calculer la puissance moyenne cédée par le champ aux charges de la portion située entre les abscisses z et $z + dz$ du conducteur. En déduire que la résistance linéique de celui-ci s'écrit : $\rho_0 = \frac{1}{\sigma 2\pi a \delta}$. Commenter ce résultat. Comment varie la résistance linéique ρ_0 en fonction de la fréquence ?

3. Bilan énergétique sur une portion de câble coaxial.

On souhaite transposer les résultats obtenus ci-dessus sur le fil conducteur simple au cas de l'âme du câble coaxial utilisé dans son mode TEM ainsi que sa gaine supposée épaisse, afin de compléter le modèle électrocinétique élaboré au III.

a) Dans le mode TEM, l'onde se propageant dans l'isolant est transverse électrique, tandis qu'on a vu ci-dessus que la présence de courants circulant selon \vec{u}_z implique l'existence d'une composante E_z du champ électrique dans le conducteur. Comparer numériquement l'amplitude maximale du champ électrique dans le conducteur et l'amplitude maximale E_0 du champ électrique de l'onde se propageant le long du câble. Commenter.

Pour tenir compte de la dissipation dans l'âme et la gaine, on suppose maintenant que l'onde de courant se propageant dans l'âme est de la forme : $I(z, t) = I_0(z) \exp[i(\omega t - kz)]$, où $I_0(z)$ est une fonction réelle positive décroissante. On suppose tous les résultats montrés au (I) transposables.

b) Montrer que la puissance moyenne $\langle dP_J \rangle$ dissipée par effet Joule dans le tronçon de câble compris entre les abscisses z et $z + dz$ s'écrit : $\langle dP_J \rangle = \frac{1}{2} \frac{I_0^2(z) dz}{\sigma 2\pi\delta} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Que vaut la résistance ρ par unité de longueur de câble ?

c) Effectuer un bilan énergétique sur le tronçon $[z, z + dz]$ et montrer que la fonction

$$I_0(z) \text{ vérifie l'équation différentielle : } \frac{dI_0}{dz} + \frac{1}{\ell} I_0(z) = 0 \text{ où } \ell = \frac{2\sigma\delta}{\varepsilon_0 c \sqrt{\varepsilon_r}} \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Interpréter cette grandeur. Comment varie ℓ avec la fréquence ? Existe-t-il une valeur du rapport $\frac{b}{a}$ qui maximise ℓ à fréquence donnée ? Commenter en lien avec les données numériques du problème. Calculer ℓ numériquement pour $f = 1 \text{ MHz}$ et $f = 100 \text{ MHz}$.

4. Modèle électrocinétique avec pertes.

a) Proposer une modification du schéma électrocinétique élaboré en (III.1), incluant la résistance linéique ρ du câble. Donner l'équation de propagation vérifiée par l'onde de tension $U(z, t)$ et l'onde de courant $I(z, t)$. On fera apparaître la célérité v introduite au (III.2) et le coefficient $D = \frac{1}{\rho\Gamma}$ que l'on interprétera.

b) Donner la relation de dispersion des ondes progressives harmoniques de la forme $A \exp[i(\omega t - kz)]$. On fera apparaître le rapport $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$ que l'on exprimera en fonction de δ , a et b . Le calculer numériquement pour $f = 1 \text{ MHz}$, $f = 10 \text{ MHz}$ et $f = 100 \text{ MHz}$.

c) Jusqu'à quel ordre faut-il pousser le développement en puissances de $\frac{\rho}{\Lambda\omega}$ pour voir apparaître un comportement dispersif ? Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g . Conclusion ?

d) Qu'en est-il de l'absorption ? Comparer aux résultats obtenus au (B. IV. 3. e.).

e) Le câble étant fermé sur une résistance de 50Ω , voici les coefficients d'atténuation $\alpha = \exp\left(-\frac{L}{\ell}\right)$ mesurés sur un câble de 100 m de long pour des fréquences variant de 1 MHz à 10 MHz.

$f(\text{MHz})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,81	0,75	0,70	0,66	0,63	0,61	0,58	0,56	0,54	0,52

Mettre en évidence graphiquement la loi expérimentale donnant le coefficient $\frac{L}{\ell}$ en fonction de la fréquence. Commenter.