

# THERMODYNAMIQUE

Ce sujet aborde différents domaines de la thermodynamique à l'équilibre, des fondements à certaines applications : fluides, fil élastique, milieux magnétiques. Plusieurs questions demandent des évaluations littérales ou numériques nécessitant l'utilisation d'ordres de grandeur non donnés, qu'il conviendra de justifier. Les résultats obtenus seront brièvement commentés.

Il est demandé d'apporter aux questions faisant référence à des connaissances de cours des réponses précises et concises.

Données numériques :

Constante de Boltzmann :	$k = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Zéro Celsius :	$T_0 = 273,15 \text{ K}$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,62.10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de Planck réduite :	$\hbar = h / 2\pi = 1,05.10^{-34} \text{ J.s}$
Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,60.10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,11.10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton :	$m_p = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron :	$m_n = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$

Formulaire :

$$I(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx \quad (a > 0) : \quad I(2) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad \text{et} \quad I(4) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$\text{Formule de Stirling pour } N \gg 1 : \quad \ln N! \sim N \ln N$$

## I - Agitation thermique d'un gaz

- 1) Qu'est-ce que l'agitation thermique ?
- 2) Comment le kelvin, unité de température thermodynamique, est-il défini à partir d'un point fixe de l'eau ?
- 3) Définir la vitesse quadratique moyenne  $v^*$  des particules d'un gaz. Rappeler comment elle est reliée à la température dans un gaz parfait.
- 4) Expliquer succinctement le mouvement brownien.
- 5) Évaluer pour l'air à température et pression ambiante : la vitesse quadratique moyenne  $v^*$ , le nombre  $n$  de particules par unité de volume et la distance moyenne  $d$  entre les molécules.
- 6) Établir, à l'aide d'un modèle simple, une expression du libre parcours moyen  $l$  en fonction du nombre  $n$  de particules par unité de volume et de leur section efficace de collision  $\sigma$ .
- 7) Indiquer pour l'air à température et pression ambiante une valeur approximative de la section efficace de collision des molécules. En déduire une évaluation du libre parcours moyen  $l$  et de la durée moyenne entre deux chocs  $\tau$ .
- 8) On envisage maintenant le gaz d'électrons libres d'un métal. Aux températures usuelles, la vitesse quadratique moyenne  $v^*$  reste constante indépendamment de  $T$ . Cette constatation va à l'encontre du résultat établi précédemment. Expliquer cette différence de comportement en quelques lignes.
- 9) Pour ce même gaz d'électrons libres, le libre parcours moyen diminue lorsque la température augmente. Expliquer.

## II - Énergie interne et capacités thermiques

- 1) Qu'est-ce que l'énergie interne  $U$  d'un corps ?
- 2) Définir sa capacité thermique  $C_v$  à volume constant.
- 3) Qu'est-ce qu'un thermostat ? Que peut-on dire de sa capacité thermique ?
- 4) Proposer une méthode simple permettant de mesurer expérimentalement la capacité thermique d'un corps solide ou liquide.
- 5) Soit un système de particules dans l'approximation classique en équilibre à la température  $T$ . Donner l'expression générale normalisée de la probabilité pour le système d'être dans un état d'énergie  $E$ .

- 6) À quelle condition la probabilité pour qu'une particule d'un tel système soit dans un état d'énergie  $\varepsilon$  est-elle proportionnelle au facteur de Boltzmann :  $\exp(-\varepsilon / k T)$  ?
- 7) Donner l'expression de l'énergie cinétique moyenne  $\langle \varepsilon_c \rangle$  d'une particule d'un gaz parfait monoatomique à l'aide d'intégrales.
- 8) Calculer cette énergie cinétique à l'aide du formulaire et retrouver l'expression donnée au I-3.
- 9) Plus généralement, citer le théorème d'équipartition de l'énergie en précisant les hypothèses nécessaires.
- 10) Exprimer l'énergie interne  $U$  d'un gaz parfait monoatomique comprenant  $N$  particules. En déduire sa capacité thermique molaire à volume constant  $c_v$ .
- 11) Contrairement au gaz parfait, pourquoi l'énergie interne d'un gaz réel dépend-elle du volume ?
- 12) Soit une molécule diatomique constituée de deux atomes identiques. Donner l'allure de l'énergie potentielle d'interaction inter-atomique en fonction de la distance  $d$  séparant les deux atomes.



- 13) On note  $m$  la masse d'un atome. Puisque la molécule est susceptible de vibrer, la distance inter-atomique  $d(t)$  varie dans le temps autour de sa valeur moyenne  $d_0$ . Donner une expression de l'énergie cinétique totale de la molécule en fonction de sa vitesse de translation, de sa vitesse de rotation et de  $d$ .
- 14) Justifier la modélisation de l'interaction inter-atomique par un rappel élastique de raideur  $K$ .
- 15) Donner une expression de l'énergie potentielle  $\varepsilon_p$  de la molécule en fonction de  $m$  et  $f_0$  la fréquence de vibration de la molécule.
- 16) Si tous les degrés de liberté de la molécule diatomique étaient excités, quelles seraient l'énergie interne et la capacité thermique molaire  $c_v$  d'un gaz parfait constitué de telles molécules ?
- 17) Établir la relation entre la capacité thermique molaire à pression constante  $c_p$  et  $c_v$  pour un gaz parfait.
- 18) À température ambiante, la molécule tourne sur elle-même mais ne vibre pas. Justifier que l'air est décrit par le coefficient  $\gamma = c_p / c_v = 1,4$ .
- 19) Une approche quantique de la vibration et de la rotation de la molécule fait intervenir des températures critiques, dites de gel, en dessous desquelles ces mouvements sont « gelés ». Expliquer en quelques lignes ce phénomène.

20) On donne les températures de gel  $T_v$  de vibration et  $T_r$  de rotation, justifier ces expressions.

$$T_v = \frac{h f_0}{k} \quad \text{et} \quad T_r = \frac{h^2}{k m d_0^2}.$$

21) Dans quel domaine de fréquence les molécules vibrent-elles ? Évaluer un ordre de grandeur des températures de gel  $T_v$  et  $T_r$ . Est-ce en accord avec l'observation à température ambiante ?

22) Dans le modèle d'Einstein, l'agitation thermique dans un solide cristallin est décrite par la vibration dans les trois directions de l'espace des atomes autour de leur position d'équilibre. Justifier que l'énergie interne peut alors se mettre sous la forme suivante pour des températures suffisamment élevées :  $U = 3NkT$  où  $N$  est le nombre d'atomes.

### III - Les principes de la thermodynamique

1) Quel contexte historique a permis l'émergence de la thermodynamique ?

#### Le premier principe

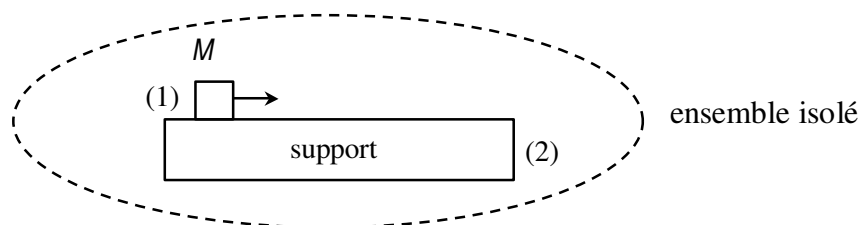
2) Énoncer le premier principe pour un système fermé quelconque.

3) Énoncer le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants pour un système fermé quelconque.

4) Considérons un système ne subissant que des travaux mécaniques. Y a-t-il une différence entre les travaux pris en compte dans l'énoncé du premier principe et les travaux pris en compte dans l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique ? Si oui, quelle différence ?

5) À quelle(s) condition(s) minimale(s) l'énergie interne est-elle conservée ?

6) Un solide (1) de masse  $M$  glisse sur un support horizontal (2) immobile. Le coefficient de frottement solide, statique et dynamique, entre ces deux corps est noté  $\mu$ . La masse possède initialement la vitesse  $v_0$  et glisse sur une distance  $L$  avant de s'arrêter. Appliquer le premier principe et le théorème de l'énergie cinétique au solide (1), au support (2) et à l'ensemble isolé. Commenter les transferts et conversions d'énergie.



- 7) Justifier, par un calcul d'ordre de grandeur, qu'en se frottant les mains on peut ressentir un échauffement notable. On envisagera une force de frottement  $F \approx 10 \text{ N}$  et on prendra des valeurs plausibles pour la vitesse des mains et l'épaisseur de la couche à chauffer. La capacité thermique massique de l'eau est :  $c = 4,18 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ .

### **Le second principe**

- 8) Énoncer le second principe de la thermodynamique pour un système isolé.
- 9) Établir l'expression de l'entropie  $\mathcal{S}(T, V)$  d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant en fonction de la température  $T$  et du volume  $V$ .
- 10) À quel physicien est associée l'expression statistique de l'entropie :  $S = k \ln \Omega$  ?
- 11) Pourquoi cette expression n'est-elle valable que pour un système isolé ? Que représente  $\Omega$  ?
- 12) Quelle est l'interprétation statistique du second principe ?
- 13) Une détente de Joule Gay-Lussac dans le vide double le volume d'un gaz parfait. Décrire cette détente et calculer la variation d'entropie correspondante à l'aide de l'expression  $\mathcal{S}(T, V)$ .
- 14) Retrouver le résultat précédent à partir de l'expression statistique de l'entropie.
- 15) Si on verse du sirop dans de l'eau, il se répartit dans tout le volume d'eau, ceci semble en accord avec le second principe : la méconnaissance du système augmente. En revanche, si de l'huile est mise dans de l'eau, elle remonte à la surface, pour former deux phases bien distinctes. Cette observation semble en désaccord avec « l'accroissement du désordre » postulé par le second principe. Commenter.

### **Le troisième principe**

- 16) Énoncer le troisième principe de la thermodynamique (principe de Nernst). En donner une interprétation statistique.

## IV - Identité thermodynamique et détermination des fonctions d'état

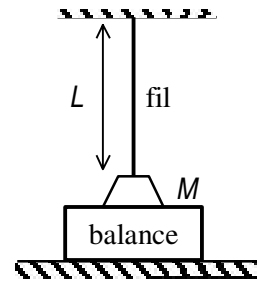
- 1) On considère un corps pur sous une phase. Des mesures expérimentales permettent de remonter aux expressions des fonctions d'état du corps. La connaissance de l'équation d'état ou des coefficients thermoélastiques permet-elle d'y parvenir ? Justifier brièvement.

### Étude macroscopique de l'élasticité d'un fil

- 2) Soit un fil caractérisé par sa température  $T$ , sa tension  $f$  et sa longueur  $L$ . Quelle est l'expression du travail élémentaire réversible qu'il reçoit lors d'une variation de sa longueur de  $dL$  ? Donner l'expression de la différentielle de son entropie  $\mathcal{S}(T, L)$  et de son énergie interne  $U(T, L)$ . On notera  $C_L$  sa capacité thermique à  $L$  constant et  $\kappa = T \left. \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L} \right|_T$ .

- 3) Établir les relations de Clapeyron permettant le calcul de  $\kappa$  et des variations de  $C_L$  à température constante à partir de la connaissance de l'équation d'état liant  $f$ ,  $T$  et  $L$ .
- 4) L'expérience met en évidence une loi de Hooke dans le domaine élastique :  $f = K(T)(L - L_0)$  où la raideur  $K$  ne dépend que de  $T$ . On considère également que  $C_L$  est une constante. Montrer alors que  $K$  est une fonction affine de  $T$  :  $K = A T + B$ .

- 5) On réalise l'expérience suivante schématisée ci-contre : un fil, dont une extrémité est fixe, est tendu par une masse  $M$ . La masse repose sur une balance électronique, tout en conservant le fil tendu. Le fil est alors chauffé à l'aide d'un briquet et on observe l'évolution de la valeur de la masse  $m$  indiquée par la balance. Quelle est la relation entre  $f$ ,  $M$  et  $m$  ?

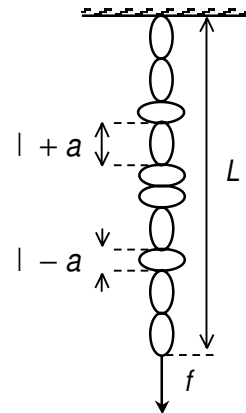


- 6) Pour un fil métallique  $m$  croît lors du chauffage, alors que pour un fil de caoutchouc  $m$  décroît. En déduire les signes de  $\kappa$  et  $A$  pour les deux fils étudiés.
- 7) Définir le coefficient  $\alpha$  de dilatation à tension constante, et déterminer son signe dans les deux cas précédents.
- 8) Quel signe du coefficient de dilatation est le plus répandu dans la nature ? Pourquoi ?
- 9) Citer un autre exemple de corps ayant un coefficient de dilatation négatif. Comment l'expliquer ?
- 10) Établir l'expression de l'entropie du fil  $\mathcal{S}(T, L)$  et de son énergie interne  $U(T, L)$ .
- 11) Vérifier que l'énergie potentielle d'un fil élastique par rapport à son état de repos correspond à la variation isotherme de son énergie libre  $F$ .
- 12) Établir plus généralement la relation entre la variation isotherme  $\Delta F$  d'énergie libre d'un système et le travail  $W$  échangé au cours d'une transformation quelconque pouvant être irréversible. Commenter.

## Modélisation microscopique de l'élasticité d'un fil de caoutchouc

Le caoutchouc est constitué, à l'échelle microscopique, de longues chaînes de polymères. Une chaîne est formée par une séquence de maillons identiques, liés les uns aux autres, pouvant être dans différents états quantiques. Une tension  $f$  peut être appliquée à son extrémité.

Le modèle d'étude comprend un très grand nombre  $N$  d'éléments, dont chacun peut apparaître dans deux états : un état court de longueur  $l - a$  et un état long de longueur  $l + a$ . On suppose pour simplifier que ces deux états ont la même énergie.



- 13) Que peut-on dire de l'énergie de la chaîne dans un tel modèle ?
- 14) Pourquoi les  $2^N$  microétats de la chaîne sont-ils équiprobables ?
- 15) Soit  $n$  le nombre de maillons dans l'état court. Exprimer la longueur totale  $L$  de la chaîne.
- 16) Justifier l'expression de l'entropie pour une longueur  $L$  donnée :  $S = k \ln \frac{N!}{n!(N-n)!}$ .
- 17) La chaîne est au repos :  $f = 0$ . Déterminer la longueur d'équilibre  $L_0$ .
- 18) Quelles hypothèses nécessite l'utilisation de la formule de Stirling, donnée dans le formulaire, pour simplifier l'expression de  $S$ ? Quelle est la traduction physique de ces hypothèses pour le système étudié ? Donner une expression simplifiée de  $S$  en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $L$  et  $L_0$ .
- 19) Montrer qu'une tension  $f$  appliquée à la chaîne est liée à la variation de  $S$  selon :  $f = -T \frac{dS}{dL}$ .
- 20) En déduire l'expression de l'équation d'état de la chaîne :  $L = L_0 + Na \operatorname{th} \left( \frac{af}{kT} \right)$ .
- 21) Pourquoi ne peut-on maximiser l'entropie pour déterminer  $L$  lorsque la chaîne est tendue ?
- 22) Pour des températures suffisamment élevées donner une expression simplifiée de  $L$ . Justifier que cette hypothèse avait déjà été utilisée.
- 23) Comparer la raideur obtenue avec ce modèle à celle établie à la question IV – 4. Que vaut  $A$  ? Comment expliquer que le modèle microscopique donne  $B = 0$ .
- 24) L'étude macroscopique du fil de caoutchouc donnait une entropie décroissante lors d'un allongement. Ce comportement est opposé à celui d'un gaz dont l'entropie croît lors d'une augmentation du volume. Comment le modèle statistique utilisé explique ce comportement ?

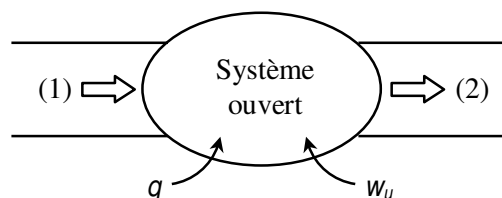
## V - Les moteurs thermiques

- 1) Démontrer l'impossibilité d'un moteur cyclique monotherme.
- 2) Justifier le sens dans lequel est décrit le cycle d'un moteur dans les diagrammes  $(P, V)$  et  $(T, S)$ .
- 3) Soit un moteur de voiture dans lequel la pression haute est de l'ordre de quelques dizaines de bars, et le volume des cylindres de l'ordre de 1 L. Évaluer la puissance du moteur en kW.
- 4) Qu'est ce qu'un moteur ditherme de Carnot ? Dessiner le cycle correspondant dans un diagramme  $(T, S)$ .
- 5) Établir l'expression du rendement d'un moteur réversible de Carnot en fonction des températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) en précisant les signes des différentes grandeurs introduites.
- 6) Justifier que le moteur de Carnot est celui qui présente le meilleur rendement possible. Pourquoi n'est-il pas utilisé en pratique ?
- 7) Dans une centrale nucléaire délivrant une puissance électrique  $P = 1$  GW, la température du cœur est  $T_{\text{cœur}} = 330^\circ\text{C}$ . Quel rendement maximal peut-on envisager ? En pratique, il est de l'ordre de 33%. Calculer la puissance thermique perdue.
- 8) Dédurre de la question précédente l'intérêt de la cogénération.

## VI - Bilan énergétique sur un système ouvert

### Application du premier principe à un système ouvert

- 1) Soit un système ouvert  $\Sigma$  dans lequel un fluide circule en régime stationnaire. En amont, il est à la pression  $P_1$  et la masse volumique  $\rho_1$ ; ses énergies interne, cinétique et potentielle massiques sont notées :  $u_1$ ,  $e_{c1}$  et  $e_{p1}$ . En aval, ces mêmes grandeurs sont notées  $P_2$ ,  $\rho_2$ ,  $u_2$ ,  $e_{c2}$  et  $e_{p2}$ . Au sein du système, le fluide reçoit l'énergie thermique  $q$  et le travail utile  $w_u$  par unité de masse. Exprimer le travail des forces de pression exercé, par unité de masse, en entrée et en sortie sur le système.



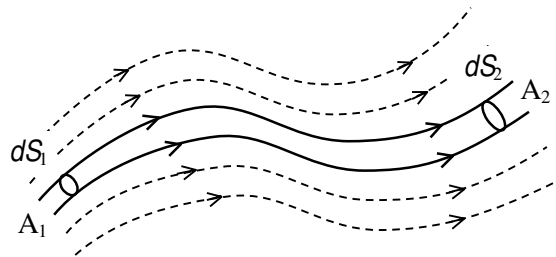
- 2) Appliquer le premier principe à un système que l'on définira soigneusement pour établir la relation exprimant la variation d'énergie massique du fluide entre l'entrée et la sortie.



## Premier principe et théorème de Bernoulli

- 3) Soit un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire soumis à des forces dérivant d'une énergie potentielle massique  $e_p$ . Donner l'équation vérifiée par le champ des vitesses (équation d'Euler).
- 4) Démontrer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant pour un tel fluide.
- 5) Soit un tube de courant de section élémentaire, entre deux points  $A_1$  et  $A_2$ , dans un fluide parfait incompressible en écoulement stationnaire. Ce système peut être considéré comme un système ouvert. Que devient la relation établie au 2 ? Que dire de l'énergie interne massique ? Retrouve-t-on les conditions établies au III-5 ?

écoulement stationnaire  
d'un fluide

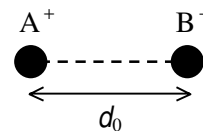


## Propulsion chimique d'une fusée

On s'intéresse à présent à la propulsion d'une fusée. Dans la chambre de combustion, la combustion du propergol amène le gaz à haute température et pression. Il est ensuite détendu dans une tuyère afin d'assurer la propulsion.

- 6) Une liaison chimique entre deux atomes est modélisée par l'interaction de deux ions dont les charges sont élémentaires et opposées, distantes de  $d_0$ . Déterminer un ordre de grandeur de l'énergie d'une liaison chimique en kilojoules par mole. Commenter la pertinence de ce modèle.

modèle d'une liaison chimique A-B



- 7) En admettant que la réaction chimique dégage une énergie  $E \sim 100 \text{ kJ.mol}^{-1}$ , évaluer l'ordre de grandeur de la température atteinte dans la chambre de combustion.
- 8) Évaluer la vitesse d'éjection des gaz  $v_{\text{gaz}}$  en sortie de la tuyère.
- 9) Les gaz sont éjectés de la fusée à la vitesse  $v_{\text{gaz}}$  par rapport à elle, avec un débit massique  $D_m$ . Effectuer soigneusement un bilan de quantité de mouvement à la fusée afin d'établir l'expression de la force propulsive  $F$ .
- 10) En déduire l'expression du débit massique minimal en fonction de la masse  $M$  initiale de la fusée.
- 11) On admet que les propergols constituent l'essentiel de la masse de la fusée. Montrer que le temps de poussée des propulseurs chimiques est toujours du même ordre. Donner son évaluation littérale et numérique. Ce résultat vous semble-t-il pertinent ?

## VII - Obtention de basses températures par liquéfaction d'un gaz

- 1) Établir l'expression de l'efficacité maximale d'une machine frigorifique cyclique ditherme en fonction des températures  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Qu'en déduit-on en ce qui concerne l'obtention de basses températures ?

### Le gaz de Van der Waals

- 2) Soit un gaz réel obéissant à l'équation d'état de Van der Waals pour une mole dans le domaine de température considéré :

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT .$$

Interpréter les deux termes correctifs par rapport à l'équation d'état des gaz parfaits.

- 3) Évaluer numériquement  $b$  pour un gaz comme l'air.
- 4) Donner en la justifiant l'équation d'état pour  $n$  moles de gaz.
- 5) On établit à l'aide de ce modèle l'expression de l'énergie interne pour  $n$  moles :

$$U(T, V) = n c_v T - \frac{a n^2}{V} .$$

Cette énergie est-elle extensive ? Interpréter le signe du terme correctif par rapport au gaz parfait.

- 6) Exprimer l'enthalpie  $H(T, P)$  en ne conservant que les termes correctifs  $a$  et  $b$  au premier ordre.

### Refroidissement par détente de Joule-Thomson

- 7) Le refroidissement des gaz réels peut être obtenu par détente isenthalpique de Joule-Thomson. Décrire les conditions de cette détente et justifier qu'elle est isenthalpique.

- 8) Démontrer la relation suivante :  $\left. \frac{\partial T}{\partial P} \right|_H = - \frac{1}{C_p} \left. \frac{\partial H}{\partial P} \right|_T$ .

- 9) Que dire d'une telle détente appliquée à un gaz parfait ?
- 10) On utilise maintenant le modèle de gaz réel de Van der Waals. Montrer que le refroidissement par détente isenthalpique n'est possible qu'en dessous d'une certaine température  $T_i$ .
- 11) Pour le diazote, la température d'inversion est  $T_i = 700$  K. Évaluer la chute de température pour une variation de pression d'une dizaine de bars avec  $c_p = 29 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  et  $b = 4.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$ . Commenter.
- 12) Une machine industrielle produit une masse  $m = 20$  kg de diazote liquide par heure. Exprimer l'énergie à prélever à l'azote pour liquéfier cette masse  $m$  à pression atmosphérique, à partir de la

température ambiante. Effectuer l'application numérique avec la masse molaire  $M = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ , la température de vaporisation à pression atmosphérique  $T_{\text{vap}} = 77 \text{ K}$  et l'enthalpie de changement d'état  $\Delta H_{\text{vap}} = 198 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

- 13) Le compresseur de la machine consomme une puissance moyenne de 37 kW. Comment faut-il comparer cette valeur à la précédente ?
- 14) Une fois le gaz liquéfié, il est possible de descendre à des températures plus basses à l'aide d'une pompe évacuant la vapeur du gaz. Expliquer.

## VIII – Thermodynamique des milieux magnétiques

Cette partie s'intéresse à la thermodynamique des milieux magnétiques. Les variables naturelles utilisées seront : la température  $T$ , l'aimantation  $M$  et l'excitation magnétique  $H$ . Les grandeurs vectorielles auront toutes la même direction  $Oz$ , c'est pourquoi nous n'utiliserons que des grandeurs scalaires, composantes de ces vecteurs selon  $Oz$ .

- 1) Pourquoi utilise-t-on préférentiellement la variable  $H$  plutôt que le champ magnétique  $B$  ?

### Moment magnétique et moment cinétique atomique

- 2) Soit un modèle classique d'atome à un électron en mouvement orbital circulaire autour du noyau. Montrer que le moment magnétique  $\mu_B$  (magnéton de Bohr) associé à ce mouvement est proportionnel au moment cinétique  $L$  de l'électron.
- 3) Évaluer littéralement le moment magnétique  $\mu_B$  en fonction de  $h$ , de la masse de l'électron  $m_e$  et de la charge élémentaire  $e$ . Effectuer l'évaluation numérique.
- 4) Que peut-on dire du moment cinétique orbital d'un atome alcalin (première colonne de la classification périodique) ? Du moment cinétique de spin et du moment magnétique du même atome ? Examiner le cas d'un atome alcalino-terreux (deuxième colonne de la classification périodique).

### Paramagnétisme à deux niveaux

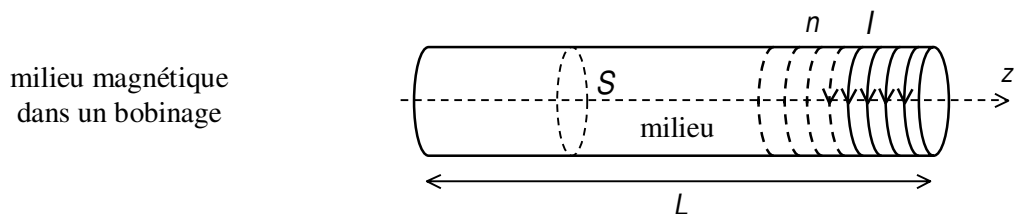
- 5) Qu'est-ce qu'un milieu paramagnétique au niveau microscopique ? Qu'est ce qui le distingue d'un ferromagnétique ?
- 6) Soit une assemblée de moments magnétiques indépendants ne pouvant prendre que deux états de projection selon l'axe  $Oz$  :  $\pm \mu_B$ . La température  $T$  est maintenue constante. Un champ extérieur  $H$  est imposé. Quelle est l'énergie d'un dipôle magnétique dans ce champ ?
- 7) Exprimer les probabilités normalisées pour un dipôle d'être dans l'état  $+\mu_B$  et  $-\mu_B$ .

- 8) En déduire l'expression de l'aimantation  $M(T, H)$  s'il y a  $n$  dipôles par unité de volume, ainsi que celle de la susceptibilité magnétique  $\chi_m = M / H$  du milieu.
- 9) Tracer  $M = f(H)$ . Interpréter les comportements limites de la susceptibilité à haute et basse température.
- 10) À quelle condition le milieu a-t-il un comportement linéaire ? Simplifier  $M(T, H)$ .
- 11) Évaluer la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  d'un paramagnétique solide à 300 K.

### Thermodynamique d'un milieu paramagnétique

Dans cette partie, l'équation d'état du milieu magnétique supposé linéaire est :  $M = \frac{C}{T} H$  (loi de Curie) où  $C$  est la constante de Curie.

- 12) Le milieu magnétique cylindrique, de section  $S$  et de longueur  $L$ , est entouré d'un bobinage jointif comportant  $n$  spires par mètre, réparties uniformément, parcourues par un courant d'intensité  $I$ . Calculer le champ  $H$  dans le milieu en fonction de  $I$ , en admettant la nullité de  $H$  à l'infini et en négligeant les effets de bord.



- 13) On impose une variation élémentaire d'intensité  $dI$ . Montrer que le travail élémentaire fourni par le générateur au système est :  $\delta W_{op} = I d\Phi$  où  $\Phi$  est le flux de  $B$  à travers le bobinage.
- 14) En déduire une expression du travail élémentaire apporté au système par unité de volume en fonction de  $H$  et  $dB$ .
- 15) Distinguer dans ce travail élémentaire la part d'énergie apportée à la variation du champ dans le vide (qui serait également apportée en l'absence de milieu) de celle effectivement fournie au milieu. Montrer ainsi que le travail élémentaire volumique reçu par le milieu magnétique est :

$$\delta W_m = \mu_0 H dM .$$

- 16) On note  $s$  l'entropie par unité de volume. Donner les différentielles de l'énergie interne volumique  $u(s, M)$  et de l'enthalpie libre généralisée volumique  $g(T, H)$  du milieu. En déduire la relation :

$$\left. \frac{\partial s}{\partial H} \right|_T = \mu_0 \left. \frac{\partial M}{\partial T} \right|_H .$$

- 17) Exprimer la différentielle de  $s(T, H)$  pour le milieu considéré en fonction de  $T$  et de  $H$ . On notera  $c_H$  la capacité thermique du milieu à champ  $H$  constant.

## Refroidissement par désaimantation adiabatique

Une substance paramagnétique à la température  $T_1$  et vérifiant la loi de Curie est soumise à un champ  $H_1$  : on dit qu'elle est aimantée. Si ensuite le milieu est calorifugé, une désaimantation par diminution du champ à la valeur  $H_2 < H_1$  conduit à un refroidissement à  $T_2 < T_1$ . Cette désaimantation, effectuée lentement, peut être considérée réversible. Elle permet l'obtention de très basses températures de l'ordre de quelques mK.

- 18) Établir la relation entre  $dT$  et  $dH$  lors d'une telle désaimantation.
- 19) Montrer que la stabilité thermique du milieu à  $H$  constant impose  $c_H > 0$ . En déduire que la désaimantation s'accompagne d'un refroidissement du milieu.
- 20) Aux très basses températures c'est la contribution magnétique qui domine dans l'expression de la capacité thermique, ce qui nous amène à fixer :  $c_H(T, H = 0) = 0$ . Établir l'expression de  $c_H(T, H)$ .
- 21) La désaimantation est effectuée en diminuant le champ d'un facteur 10 :  $H_2 = H_1 / 10$ . Quelle est la température finale  $T_2$  si  $T_1 = 1$  K ?
- 22) Quelle est la variation d'aimantation  $M$  ? Que penser de la terminologie « désaimantation adiabatique » ?

## Transition de phase ferromagnétique-paramagnétique – Modèle de Landau

- 23) Qu'est-ce qu'une transition de phase du premier ordre ? Donner un exemple.
- 24) Pourquoi la transition liquide-vapeur au point critique est-elle du second ordre ? Que dire de la compressibilité isotherme  $\chi_T$  en ce point ? Par quel phénomène ceci se traduit-il ?
- 25) L'énergie libre volumique du milieu magnétique dans un modèle de Landau s'écrit :

$$f(T, M) = f_0(T) + a(T - T_c) \frac{M^2}{2} + b \frac{M^4}{4} \quad (a \text{ et } b \text{ constantes positives})$$

où  $T_c$  est la température critique de Curie. En déduire l'équation d'état du milieu :  $H(T, M)$  en s'aidant des résultats obtenus à la question 16.

- 26) Montrer que  $f$  est un potentiel thermodynamique pour un système magnétique isotherme sans champ extérieur imposé. Tracer l'allure de  $f(M)$  pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$ .
- 27) En déduire l'aimantation à l'équilibre sans champ imposé pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$ . Commenter.
- 28) Justifier que la transition ferromagnétique-paramagnétique n'est pas du premier ordre.
- 29) Déterminer l'expression de  $s(T, M)$  par dérivation de  $f$ .
- 30) On étudie la transition en champ extérieur nul :  $H = 0$ . Donner  $s(T)$  pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$ . En déduire les valeurs de  $c_H$  pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$ . La transition est-elle du second ordre ?

31) Calculer la susceptibilité magnétique  $\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T$  pour  $T > T_c$  et  $T < T_c$ .

32) Au voisinage de la transition à  $T_c$ , les grandeurs physiques présentent un comportement critique en puissance de  $|T - T_c|$  :

$$c_H \propto |T - T_c|^{-\alpha} ; \quad M \propto |T - T_c|^\beta ; \quad \chi \propto |T - T_c|^{-\gamma} .$$

Justifier que  $\alpha = 0$  convient. Donner les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma$ . Montrer qu'ils vérifient l'égalité de Rushbrooke :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 .$$

33) Pour  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  la mesure des exposants critiques donne :  $\alpha = -0,16$  ;  $\beta = 0,405$  et  $\gamma = 1,35$ . L'écart de ces valeurs expérimentales à celles données par le modèle de Landau s'explique par le rôle essentiel des fluctuations, négligées dans l'approche classique précédente, au voisinage de  $T_c$ . Justifier l'importance des fluctuations d'aimantation au voisinage de la température critique.

**FIN**