

ONDES EN MÉCANIQUE CLASSIQUE ET QUANTIQUE :

COHÉRENCE , PAQUETS D'ONDE ET CONFINEMENT

PRÉAMBULE

Cette épreuve porte sur quelques aspects de la physique ondulatoire en mécanique classique (partie 1) et quantique (partie 2). La cohérence et ses liens avec la largeur spectrale et le principe d'incertitude d'Heisenberg sont plus particulièrement abordés.

Les deux parties sont quasiment indépendantes et ont sensiblement la même importance. Dans la partie 1 les sections A et B sont également indépendantes.

Tout résultat donné dans le texte peut être utilisé même s'il n'a pas été établi.

Dans la première partie, la notion de train d'onde est introduite à partir de l'expérience d'Arago (section A.1) et sa relation avec la largeur spectrale est étudiée dans la section A.2. La section B est consacrée à la notion de paquets d'onde et son application à l'interprétation du sillage des bateaux.

Dans la deuxième partie, on retrouve quelques résultats essentiels de la mécanique quantique à partir d'une approche historique dans la section A. La section suivante porte sur l'étude d'une particule piégée dans un puits simple (infini en section B.1 puis asymétrique en section B.2) et met en évidence le rôle fondamental joué par le principe d'incertitude d'Heisenberg dans l'interprétation des résultats. On étudie ensuite dans la troisième section la levée de dégénérescence des systèmes à double puits et son application à la cohésion des molécules simples. **On apportera aux questions qualitatives des réponses concises et précises.**

Rappel de quelques formules et définitions utiles concernant la transformation de Fourier à une dimension :

On note les paires de variables conjuguées (t, ω) , pour la partie 1, et (x, k) pour la partie 2. Si $s(t)$ et $\hat{s}(\omega)$ (resp. $f(x)$ et $g(k)$) sont des fonctions transformées l'une de l'autre, elles vérifient :

$$\triangleright f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(k) dk$$

$$\triangleright s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{s}(\omega) d\omega$$

$$\triangleright g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

$$\triangleright \hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} s(t) dt$$

\triangleright La transformée de Fourier de $\frac{df}{dx}$ est

\triangleright La transformée de Fourier de $\frac{ds}{dt}$ est

$$ik g(k)$$

$$i\omega \hat{s}(\omega)$$

\triangleright Théorème de Parseval-Plancherel :

\triangleright Théorème de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_1^*(k) g_2(k) dk$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t) s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1^*(\omega) \hat{s}_2(\omega) d\omega$$

où g_1 (resp. g_2) représentent les transformées de f_1 (resp. f_2).

où \hat{s}_1 (resp. \hat{s}_2) représentent les transformées de s_1 (resp. s_2).

\triangleright Transformée de Fourier d'une gaussienne :

\triangleright Transformée de Fourier d'une gaussienne :

$$g(k) = e^{-k^2/2\sigma^2} \Rightarrow f(x) = \sigma e^{-x^2\sigma^2/2}$$

$$\hat{s}(\omega) = e^{-\omega^2/2\sigma^2} \Rightarrow s(t) = \sigma e^{-t^2\sigma^2/2}$$

La notation f^* (resp. s^*) fait référence au complexe conjugué de f (resp. s).

Deux intégrales utiles : $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

PARTIE 1. ONDES EN PHYSIQUE CLASSIQUE :

COHÉRENCE ET PAQUETS D'ONDES

Section A : Cohérence des ondes lumineuses

A.1 : Mise en évidence des trains d'onde. Expérience d'Arago :

A.1.1 : Interférences en lumière parfaitement cohérente :

On considère le dispositif représenté figure 1 (les échelles réelles ne sont pas respectées, pour des raisons de clarté).

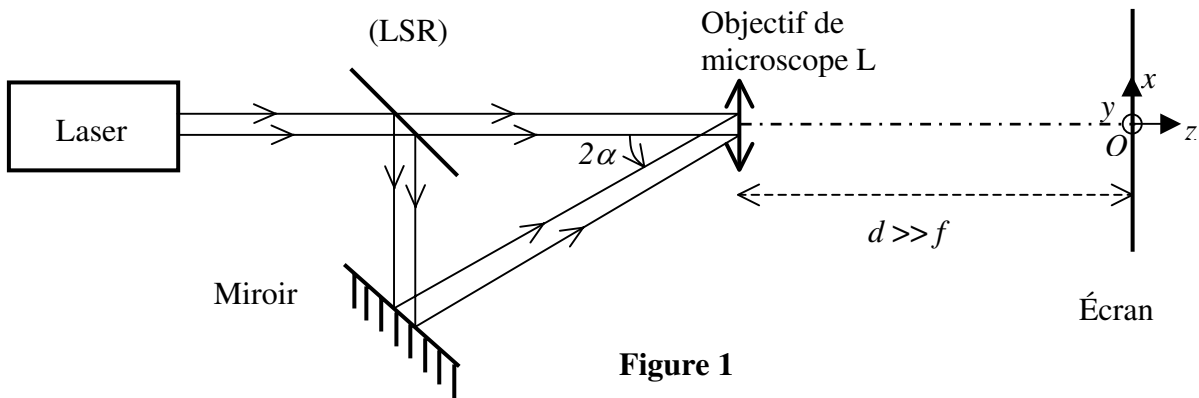


Figure 1

L'objectif de microscope est assimilé à une lentille mince convergente L de distance focale f de l'ordre de quelques millimètres.

Le faisceau laser incident, non polarisé, est parallèle à l'axe optique de l'objectif ; la lame semi-réfléchissante (LSR), infiniment mince et idéale, fait un angle de 45° avec cet axe, et l'angle α entre les normales au miroir et à la lame LSR, n'excède pas 1° .

L'écran d'observation est placé perpendiculairement à l'axe optique de l'objectif, à une distance d de celui-ci, grande devant f (d est de l'ordre du mètre). On note O l'intersection de l'axe optique avec l'écran, Ox et Oy deux axes dans le plan de l'écran ; Oy est perpendiculaire au plan de la figure.

On assimile le faisceau issu du laser à une onde plane progressive parfaitement monochromatique, de fréquence ν_0 et de nombre d'onde $\sigma_0 = \nu_0/c$ où c est la célérité de la lumière dans le vide.

La vibration lumineuse émise est décrite en notation complexe par un champ scalaire de la forme :

$$\underline{s}(M, t) = s_0 \exp(2i\pi(\nu_0 t - \sigma_0 \delta(M))) \quad (1)$$

où $\delta(M)$ représente le chemin optique entre le plan d'onde situé à la sortie du laser et le point M , et où s_0 est une amplitude réelle. On rappelle que l'éclairement associé à une telle onde peut alors s'écrire, à une constante multiplicative près que l'on omettra par la suite :

$$\mathcal{E}(M) = \underline{s} \underline{s}^* \quad \text{où } \underline{s}^* \text{ désigne le complexe conjugué de } \underline{s}.$$

- a) On note S_1 et S_2 les deux sources secondaires obtenues dans le plan focal image de L. Construire ces sources sur un schéma et exprimer la distance a qui les sépare en fonction de α et de f . Comparer a et d .
- b) Pourquoi peut-on parler du chemin optique δ_{S_1} (resp. δ_{S_2}) entre la sortie du laser et S_1 (resp. S_2), indépendamment du rayon suivi ?
- c) Que vaut le module de l'amplitude de chacune des vibrations dans les deux faisceaux incidents sur la lentille L ?

- Comparer les amplitudes des deux rayons issus respectivement de S_1 et de S_2 arrivant en un point P de l'écran, repéré à partir de O par ses coordonnées (x, y) , éclairé par les deux sources, compte-tenu des hypothèses.
- Exprimer l'éclairement résultant total $\mathcal{E}(P)$ (on note s'_0 l'amplitude de la vibration reçue en P issue de S_1).
- Décrire la forme des surfaces iso-éclairement au voisinage de l'écran et en déduire que les franges observées sur l'écran sont assimilables à des droites dont on précisera la direction par rapport à celle de l'axe joignant S_1 et S_2 .
- Définir et exprimer l'interfrange i en fonction de a , d et σ_0 . Estimer son ordre de grandeur pour α de l'ordre de 1° .
- Comparer l'éclairement des franges brillantes à celui qu'on obtiendrait en superposant directement les éclairements issus des deux sources et commenter.

A.1.2: Rôle de la polarisation :

On s'intéresse à présent au caractère vectoriel du champ électrique de l'onde lumineuse précédemment décrit par la vibration \underline{g} . Pour cela, on dispose de deux polariseurs P_1 et P_2 . On place (figure 2) un polariseur sur chaque faisceau.

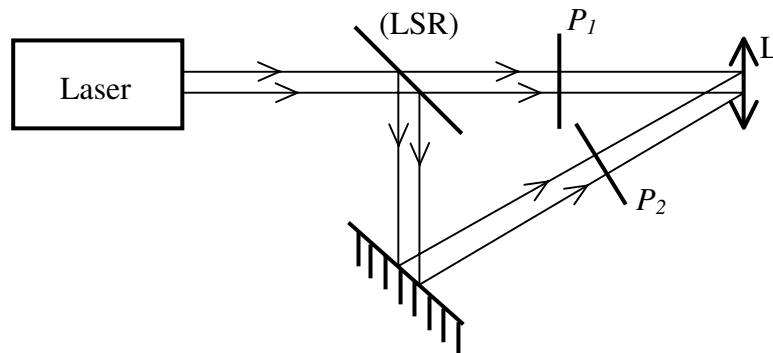


Figure 2

- Décrire l'action d'un tel polariseur, supposé idéal, sur une vibration incidente polarisée rectilignement de façon quelconque et retrouver la loi de Malus associée.
- Comment les observations de **A.1.1.** sont-elles modifiées :
 - dans le cas où P_1 et P_2 sont parallèles ?
 - dans le cas où ils sont perpendiculaires ?

Justifier, en reprenant et en précisant le calcul d'éclairement effectué en **A.1.1.e)**

- Dans le cas d'une observation avec P_1 et P_2 perpendiculaires, on place à présent juste avant L un troisième polariseur P_3 orienté à 45° des directions de P_1 et P_2 .
 - Qu'observerait-on alors si la direction de polarisation incidente \vec{u} (avant P_1 et P_2) était parfaitement définie et faisait un angle θ constant avec celle que laisse passer P_1 (\vec{u}_{P1}) (figure 3) ?
 - Qu'observe-t-on en réalité avec un laser non polarisé ?
 - Quelle est l'hypothèse de **A.1.1.** qui est ici remise en question ?

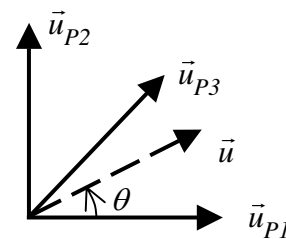


Figure 3

A.1.3 : Cohérence de polarisation : trains d'onde :

En plaçant avant le dispositif de séparation des faisceaux un polariseur P_4 orienté à 45° des directions de P_1 et P_2 , on observe la même figure d'interférences qu'en A.1.1., évidemment moins lumineuse toutefois.

Pour interpréter l'ensemble de ces observations, on précise la description donnée par l'équation (1) en A.1.1. en introduisant la notion de trains d'onde sous sa forme la plus simple :

$$\bar{E}(M, t) = \sum_{t_k} s_0 \exp(2i\pi(\nu_0 t - \sigma_0 \delta(M)) - \varphi_S(t_k)) \pi_\tau(t - t_k) \vec{u}(t_k) \quad (2)$$

où: $\begin{cases} \pi_\tau(t) = 1 \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau \\ \pi_\tau(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } t > \tau \end{cases}$; $\vec{u}(t_k)$ est le vecteur unitaire transverse à la

direction de propagation et fonction aléatoire de t_k , $\varphi_S(t_k)$ une phase aléatoire, constante sur chaque motif, t_k désignant les origines successives des différents trains d'onde de longueur τ avec : $|t_{k+1} - t_k| \geq \tau$.

On suppose ici que dans tout le champ d'observation, la différence de chemin optique entre les rayons issus de S_1 et de S_2 est très inférieure à $c\tau$.

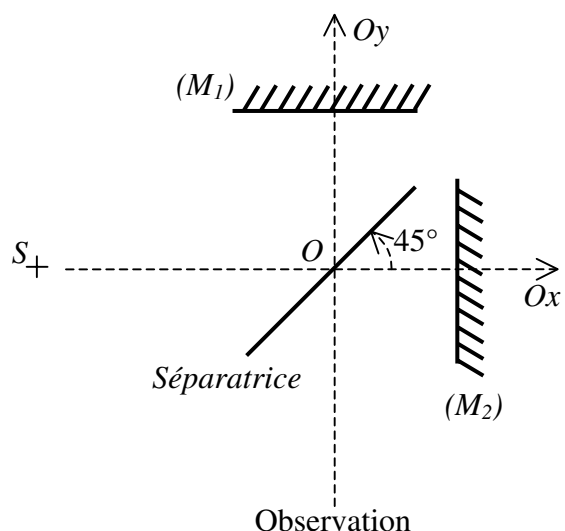
- Représenter schématiquement l'allure de l'évolution temporelle du champ électrique (2) ainsi décrit par la méthode de votre choix.
- On note $\theta(t)$ l'angle entre la direction de \vec{u} et celle \vec{u}_{P_1} de P_1 . Montrer alors que ce modèle simplifié de trains d'onde permet d'interpréter toutes les observations précédentes, en particulier :
 - présence d'interférences sans aucun polariseur,
 - absence d'interférences avec P_1 , P_2 et P_3 seulement,
 - réapparition de ces interférences avec P_4 en plus

A.2 : Analyse de la forme d'un train d'onde : utilisation de l'interféromètre de Michelson :

A.2.1 : Source monochromatique :

Un interféromètre de Michelson est essentiellement constitué de deux miroirs plans (M_1) et (M_2), et d'une lame semi-réfléchissante, la séparatrice, considérée ici comme infiniment mince (figure 4). Une onde lumineuse issue d'une source ponctuelle monochromatique S arrive d'abord sur la séparatrice et donne naissance à deux ondes d'éclairements voisins qui se réfléchissent sur chacun des deux miroirs avant de se recombiner en sortie.

Les miroirs sont supposés ici respectivement exactement perpendiculaires à Oy (M_1) et à Ox (M_2). La séparatrice fait un angle de 45° avec ces directions. (M_2) peut se déplacer le long de l'axe Ox en translation (« chariotage »)



Observation
Figure 4

a) Montrer qu'un tel système est équivalent, du point de vue des observations en sortie, à une lame d'air d'épaisseur e réglable, où S^* remplace S et où S_1 et S_2 jouent alors le rôle de sources secondaires (figure 5).

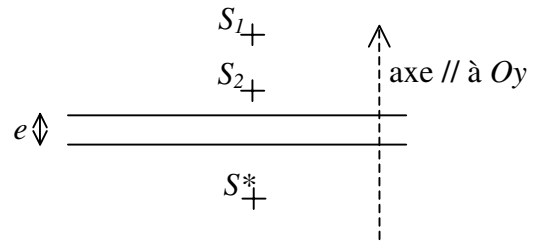


Figure 5

b) En déduire l'allure de la figure observée sur un écran placé perpendiculairement à Oy suivant qu'il est :

- à une distance d de O ,
- dans le plan focal image d'une lentille convergente.

c) Préciser comment évolue qualitativement cette figure dans chaque cas ci-dessus :

- par déplacement de S parallèlement à Ox (en profondeur),
- par déplacement latéral de S (perpendiculairement à Ox).

d) En déduire que les interférences ne sont très clairement visibles avec une source étendue que dans le cas d'une « observation à l'infini ». Comment appelle-t-on ce phénomène ? Y a-t-il dans ce cas une limite a priori à l'étendue de la source ?

e) Établir que l'éclairement observé au point M dans le plan focal image de la lentille L de centre C et d'axe optique parallèle à Oy est de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 (1 + \cos(2\pi\sigma_0 \delta(M))) \quad (3) \quad \text{avec } \delta(M)$$

$= 2 e \cos(i)$ où i est l'angle formé par CM avec l'axe optique de L .

f) Dans la pratique, (M_1) et (M_2) sont orientables et la séparatrice est d'épaisseur finie. Expliquer la présence et le rôle d'une compensatrice.

g) Proposer un protocole de réglage permettant d'obtenir, avec par exemple une lampe spectrale, une figure d'interférences nette, contrastée et lumineuse telle que décrite ci-dessus.

A.2.2 : Obtention d'un profil de raie :

On revient à la description de la lumière comme une suite de trains d'onde envisagée en A.1.3., expression (2). On ne s'intéresse plus ici aux conséquences de la variation aléatoire de la direction de polarisation, déjà étudiées dans la section A.1., mais plutôt à une représentation plus précise de l'enveloppe du train d'onde décrite dans l'expression (2) par la fonction $\pi_\tau(t-t_k)$.

On choisit donc ici de décrire le motif k de la vibration par une enveloppe de la forme $f(t-t_k)$, et donc l'amplitude complexe de la vibration par :

$$\underline{s}(t) = \sum_k \underline{s}_k(t) \quad \text{avec :} \quad \underline{s}_k(t) = f(t-t_k) \exp(i(\omega_0 t - \varphi_k)) \quad \text{où } \omega_0 = 2\pi\nu_0$$

On note $\hat{\underline{s}}_k(\omega)$ la transformée de Fourier de $\underline{s}_k(t)$. On néglige ici l'influence de tout recouvrement entre les motifs.

a) Montrer que $|\hat{\underline{s}}_k(\omega)|^2$ ne dépend ni de t_k , ni de φ_k .

b) On généralise la définition de l'éclairement donné en A.1.1, dans le cas d'une onde non monochromatique, par $\mathcal{E}(M) = \langle \underline{s} \underline{s}^* \rangle_t$ où la moyenne temporelle est faite sur un très grand nombre de trains d'onde. On définit alors la densité spectrale d'éclairement $B_\omega(\omega)$ associée à la source par $d\mathcal{E} = B_\omega(\omega) d\omega$. Montrer en utilisant le formulaire et moyennant quelques approximations que l'on précisera que $B_\omega(\omega)$ est proportionnelle à $|\hat{\underline{s}}_k(\omega)|^2$.

c) Comment en déduire la densité spectrale en nombre d'onde $B_\omega(\sigma)$?

- d) On enregistre avec un Michelson réglé en lame d'air l'éclairement issu d'une source décrite par le modèle ci-dessus et arrivant sur une petite région au centre de la figure d'interférences où se trouve un capteur transformant l'intensité lumineuse qu'il reçoit en tension, ce signal étant ensuite acquis sur ordinateur et exploité avec un logiciel disposant de calcul de transformée de Fourier rapide. L'enregistrement est réalisé en « chariotant » (M_2) à vitesse constante v sur une distance totale Δ .
- Généraliser l'expression (3) de A.2.1.e) à cette situation en utilisant la fonction $B_\sigma(\sigma)$. Pourquoi peut-on étendre l'intervalle d'intégration à $]-\infty, +\infty[$
 - Préciser le lien entre $B_\sigma(\sigma)$ et la transformée de Fourier du signal mesuré. On précisera entre autres le lien entre les fréquences temporelles données par le logiciel et les nombres d'onde intervenant dans $B_\sigma(\sigma)$.
 - Qu'est-ce qui détermine en pratique la résolution spectrale de la mesure ainsi effectuée ?
 - La mesure est-elle si simple à effectuer avec un Michelson tel que ceux qu'on peut utiliser dans les lycées ?
 - Dans quelle technique de spectrométrie ce procédé est-il mis en oeuvre ?
- e) Quels sont les principaux profils de raies obtenus avec des lampes spectrales ?
- f) Quelles sont les différentes causes d'élargissement d'une raie à partir de sa largeur naturelle ?
- g) Quelle relation simple (en ordre de grandeur) existe-t-il entre la largeur spectrale $\Delta\nu$ d'une raie et la durée moyenne τ des trains d'onde associés à cette raie ?

Section B : Paquets d'ondes, vitesse de groupe :

Dans cette section, on considère un phénomène ondulatoire en physique classique, en ne se restreignant plus aux ondes lumineuses (ondes mécaniques par exemple). Dans les parties B.1. et B.2. on se restreint pour simplifier à une description unidimensionnelle.

La grandeur physique qui se propage est notée $X(x, t)$ et est solution d'une équation d'onde linéaire à coefficients réels. On peut donc considérer que X est une superposition d'ondes planes harmoniques et utiliser la notation complexe :

$$(4) \quad \begin{cases} X = \text{Re}(\underline{X}) \\ \underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k x)) d\omega \\ \underline{A}(\omega) = A(\omega) \exp(i\varphi(\omega)) \end{cases}$$

Le milieu de propagation est supposé purement dispersif, non absorbant, la propagation dans ce milieu est alors décrite par la relation $k(\omega)$.

B.1 : Description d'un paquet d'onde spectralement étroit, vitesse de groupe :

B.1.1 :

On considère d'abord le cas où la fonction $\underline{A}(\omega)$ n'a de valeurs notables en module qu'au voisinage de la pulsation ω_0 , sur un intervalle étroit $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$ avec la restriction $\Delta\omega \ll \omega_0$.

- a) En considérant le développement limité au premier ordre de la relation de dispersion $k(\omega)$ (resp. de la phase $\varphi(\omega)$) au voisinage de la pulsation ω_0 comme

une approximation suffisante de celle-ci, mettre l'expression de \underline{X} sous la forme du produit d'une porteuse à la pulsation ω_0 par une amplitude complexe modulée de la forme $\underline{F}(t - \frac{x}{v_g})$ où on précisera l'expression de \underline{F} et de v_g en fonction des données.

- b) Illustrer le résultat obtenu sur un schéma simple et clair, et expliquer à quoi correspondent les vitesses de phase et de groupe.

B.1.2 :

- a) Déterminer la position $x_C(t)$ du maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes.
 b) Y a-t-il dans le cadre de cette modélisation déformation du paquet d'ondes lors de sa propagation ?
 c) Comment généraliser qualitativement ces résultats à un paquet d'ondes spectralement large ?

B.2 : Interprétation interférentielle, stationnarité de la phase :

On se propose de retrouver les résultats précédents par une approche interférentielle. Pour cela, on note : $\psi(\omega, t, x) = \omega t - kx + \varphi(\omega)$ la phase de chaque onde constituant le paquet étudié, celui-ci étant toujours supposé spectralement étroit.

B.2.1 :

- a) Établir que $x_C(t)$, défini en **B.1.2.a** est donné par l'équation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega}(\omega_0, t, x_C(t)) = 0 \quad (5)$$

- b) En interprétant l'expression intégrale donnée par (4) comme une interférence à ondes multiples, en déduire que le maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes est un lieu d'interférences « constructives », mais dont l'état instantané réel dépend de la phase de la porteuse. Pourquoi parle-t-on de stationnarité de la phase ?

B.2.2 :

- a) Établir de même qu'un point donné de l'enveloppe d'abscisse $x_{env}(t)$ est décrit par l'équation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \omega}(\omega_0, t, x_{env}(t)) = C \quad (5')$$

où C est une constante dépendant du point de l'enveloppe choisi.

- b) Interpréter la différence entre $C = 0$ et $C \neq 0$.
 c) Montrer que pour le paquet de largeur spectrale totale $\Delta\omega_{total} = 2 \Delta\omega$ étudié ici,

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right| = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{total}} \quad (5'')$$

définit à peu près les extrémités spatio-temporelles du paquet d'ondes.

B.2.3 :

- a) En raisonnant à t fixé, et en exploitant (5''), établir alors un lien simple entre la largeur spatiale totale du paquet Δx et sa largeur spectrale, puis réexprimer cette relation en faisant intervenir la largeur Δk_{total} en pulsations spatiales, que l'on exprimera en fonction de $\Delta\omega_{total}$ et de v_g .

- b) En raisonnant de même à x fixé, déterminer la durée de passage du paquet, Δt , à un endroit donné en fonction de $\Delta\omega_{total}$, et comparer à la relation obtenue en A.2.2.g).

B.3 : Application au sillage des bateaux :

On s'intéresse ici à l'interprétation de la forme générale du sillage d'un bateau en eau profonde et par temps calme telle qu'elle a été donnée par Lord Kelvin en utilisant les idées qui précèdent.

B.3.1 :

- Quelle est la nature des ondes qui interviennent dans un tel problème ? Quelle est la grandeur physique décrite par $X(x, t)$?
- Pourquoi peut-on dans cette étude négliger l'influence de la tension superficielle ?
- Sachant qu'on s'intéresse ici au sillage en eau profonde, montrer que la seule grandeur autre que k et ω qui peut intervenir dans la relation de dispersion est l'accélération de la pesanteur g ?

Vérifier, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, que l'on a la relation $\omega^2 = K g k$ où K désigne un coefficient multiplicatif sans dimension.

- Établir que quelle que soit la valeur de K on a $v_\phi(\omega) = 2 v_g(\omega)$ où v_ϕ (resp. v_g) représente la vitesse de phase (resp. de groupe). Dans la suite, on prendra $K = 1$.

B.3.2 :

On suppose que l'on peut considérer les ondes constituant le sillage comme un paquet bi-dimensionnel d'ondes planes de la forme $\underline{A} \exp(i(\omega t - \vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}))$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les surfaces d'onde (ici lignes, à deux dimensions) associées à l'onde de vecteur d'onde \vec{k}_α , font l'angle α (variable) avec l'axe Ox support de la vitesse \vec{U} de déplacement du bateau (vitesse supposée constante en direction et en module), \vec{k}_α étant perpendiculaire à ces surfaces (figure 6), son module $k_\alpha(\omega)$ vérifiant la relation de dispersion précédente.

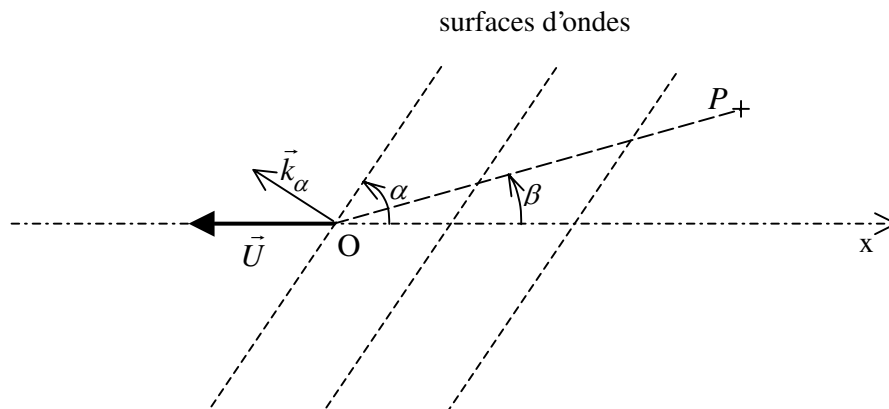


Figure 6

- Ces ondes ayant pour source le point O situé à la proue (avant) du bateau, doivent pour être entretenues efficacement, recevoir le plus possible d'énergie de celui-ci. En déduire que la phase de ces ondes en O doit constamment valoir un multiple entier de 2π .

b) Comment sont alors ces ondes dans le référentiel lié au bateau ?

c) En déduire la relation :
$$k_\alpha = \frac{g}{U^2 \sin^2 \alpha}$$

B.3.3 :

Pour que de telles ondes puissent par superposition donner en un point P (repéré par rapport à la proue par β , cf. figure 6) un ébranlement de la surface libre non nul, elles doivent interférer constructivement.

a) En utilisant la méthode étudiée en **B.2.1.** (stationnarité de la phase), en déduire alors la relation :
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)}{2}$$

b) Cette relation conduit alors à l'expression de β en fonction de α (qu'on ne demande pas d'établir) :
$$\tan(\beta) = \frac{\tan(\alpha)}{2 + \tan^2 \alpha}$$
 dont la courbe représentative est donnée figure 7.

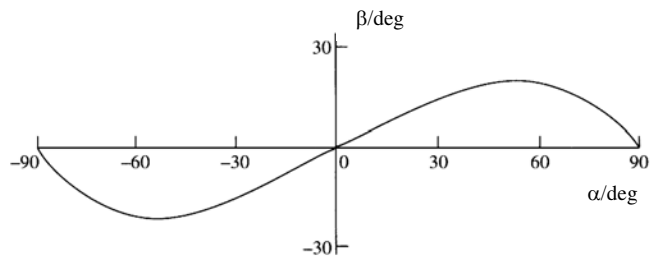


Figure 7

En déduire que le sillage est confiné à l'intérieur du cône de Kelvin dont on précisera l'angle au sommet. Ce cône dépend-il de la vitesse du bateau ?

c) L'allure des crêtes du sillage est donnée par la figure 8. Interpréter cette figure à l'aide d'une démarche interférentielle et de la courbe de la figure 7 (on n'oubliera pas que toutes les ondes considérées sont en phase au point O).

- On interprètera en particulier l'existence de plusieurs branches sur chaque crête.
- Ces crêtes peuvent-elles sur une photo donner accès à la vitesse du navire ?

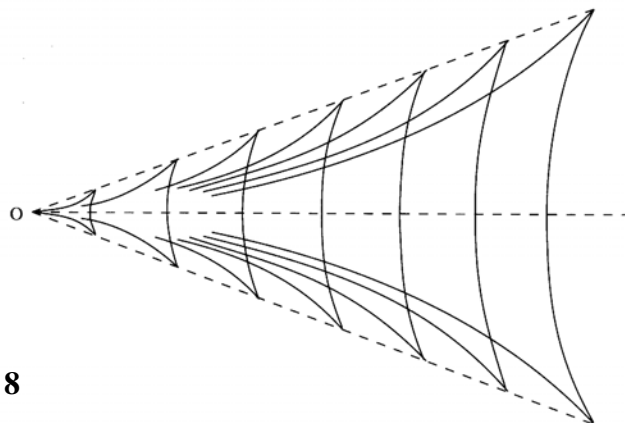


Figure 8

PARTIE 2 . ONDES EN MÉCANIQUE QUANTIQUE: COHÉRENCE ET CONFINEMENT

Dans toute cette partie, dans un souci de simplification, on se restreint à l'étude de phénomènes unidimensionnels, x représentant alors la variable d'espace et t celle de temps.

Données numériques : constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js ; $\hbar = h / 2\pi$
 masse de l'électron : $m_e = 9,30 \cdot 10^{-31}$ kg ; charge de l'électron : $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
 masse du proton \approx masse du neutron : $m_p \approx m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Section A : Incertitudes

A.1 :

- a) Écrire la fonction $\underline{E}(x,t)$ décrivant l'amplitude complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique plane monochromatique polarisée rectilignement se propageant dans le vide, suivant l'axe \hat{x} , de pulsation ω et de vecteur d'onde k .
- b) Établir l'équation de propagation de cette onde à partir des équations de Maxwell. Exprimer la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde k et montrer que le vide est un milieu non-dispersif.
- c) Décrire brièvement une expérience mettant en évidence la nature quantique des phénomènes décrits par une telle onde. Exprimer la relation entre énergie et fréquence d'un photon.

A.2:

- a) Énoncer la relation de de Broglie, pour une particule matérielle de masse m , reliant la quantité de mouvement p , et la longueur d'onde λ .
- b) Interpréter cette relation physiquement.
- c) Calculer λ pour un électron accéléré par une différence de potentiel de 10V. Citer une application.

A.3 :

- a) Décrire une expérience d'interférences entre ondes de matière avec un dispositif de type fentes d'Young, et un faisceau de particules incident monocinétique.
- b) Énoncer ses principaux résultats, en particulier en termes de probabilités (on décrira l'onde associée aux particules permettant d'interpréter simplement ces résultats).
- c) Cette expérience permet-elle de préciser le lien énergie-fréquence des particules dans ce cas ?

A.4 :

- a) Le bon choix pour des particules libres est de relier l'énergie et la fréquence de la même façon que pour des photons. Définir le vecteur d'onde k . En utilisant l'expression classique reliant l'énergie E et la quantité de mouvement p montrer que le vide correspond à un milieu dispersif pour une particule libre de masse m . Définir les vitesses de groupe v_g et de phase v_ϕ pour la fonction amplitude de probabilité ; comparer v_g à v_ϕ et commenter le résultat obtenu.
- b) Montrer alors que les ondes de de Broglie de la forme $\psi(x,t) = \psi_0 e^{i(px-Et)/\hbar}$ satisfaisant cette relation de dispersion sont solutions d'une équation aux dérivées partielles simple que l'on précisera.
- c) Montrer que la généralisation de ce raisonnement lorsque la particule évolue dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle $V(x)$ est compatible avec l'équation postulée par Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- d) Quelle est la propriété importante de l'équation d'évolution de Schrödinger ?
 e) Définir un opérateur \hat{p} représentant la quantité de mouvement p .

A.5 :

- a) Définir la probabilité de trouver la particule à la position x à dx près, et la densité de probabilité associée.
 b) Montrer qu'une onde plane ne peut pas satisfaire les conditions de normalisation de cette fonction.

A.6 :

- a) On reprend donc la notion de paquet d'onde introduite dans la première partie (les notations conventionnelles utilisées ici étant légèrement différentes de celles employées dans la partie I) et on définit :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - \omega t)} g(k) dk$$

où $g(k)$ est la densité spectrale de $\psi(x, t)$. Montrer que la condition de normalisation de la fonction de probabilité est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(k)|^2 dk = 1$$

- b) On définit la valeur moyenne de la position et de la quantité de mouvement par $\langle \hat{x}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx$ et $\langle \hat{p}(t) \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx$.

On pose $\varphi(p) = g(k) \frac{1}{\sqrt{\hbar}}$. Préciser, à l'aide du formulaire, l'expression de $\varphi(p)$ par une relation intégrale en fonction de $\psi(x, 0)$, puis de $\psi(x, t)$. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(p)|^2 dp = 1$.

- c) Montrer que $\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p |\varphi(p)|^2 dp$ et que $\langle f(\hat{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) |\varphi(p)|^2 dp$
 d) En déduire une interprétation physique de $\varphi(p)$.

A.7 :

- a) On définit l'incertitude de mesure d'une grandeur physique $A(x, t)$:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Énoncer le principe d'incertitude d'Heisenberg relatif à Δx et Δp .

- b) Montrer que, pour le paquet d'onde gaussien défini par : $g(k) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$

on a : $\Delta x \Delta p (t = 0) = \hbar / 2$.

- c) On peut établir également la relation d'incertitude énergie-temps $\Delta t \Delta E = \hbar / 2$. Donner une interprétation physique de Δt .
 d) Faire une analogie entre l'incertitude associée à cette fonction de probabilité et les conditions de cohérence d'un paquet d'onde classique discutées en I.B. S'agit-il de cohérence spatiale ou de cohérence temporelle ?

A.8 :

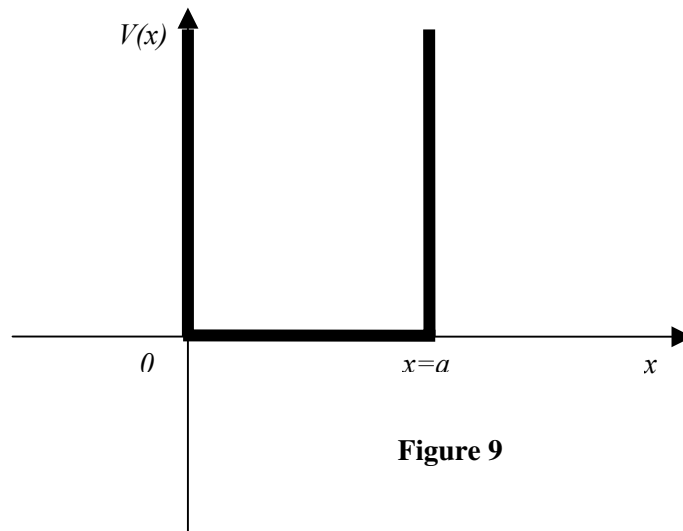
- a) Dans le cas d'une fonction $\varphi(p)$ peu étalée autour de son centre $p_0 = \langle \hat{p}(t) \rangle$, établir que : $\psi(x, t) \approx e^{i(p_0 v_g - E_0)t/\hbar} \psi(x - v_g t, 0)$ où on précisera l'expression de v_g en fonction de $E(p)$ et de ses dérivées (on pourra procéder par analogie avec I.B.1.). Interpréter physiquement cette relation ; que représentent v_g et E_0 ?
 b) Dans le cas d'une particule de masse m , libre de se déplacer, quelle relation liant p et v_g retrouve-t-on ainsi ?
 c) Ce résultat dépend-il du choix discuté en II.A.4.a ?

Section B : Particule piégée dans un puits de potentiel

B.1. Puits de potentiel infini :

B.1.1 :

Citer une des expériences qui ont conduit à l'hypothèse de quantification de l'énergie d'une particule confinée dans l'espace.



B.1.2 :

a) On définit un puits de potentiel $V(x)$ par :
$$\begin{cases} V(x) = 0, & 0 < x < a \\ V(x) = \infty, & x > a, \quad x < 0 \end{cases}$$
. Donner

les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde ψ , en $x = 0$ et $x = a$.

b) Résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule piégée dans le puits et vérifier que les solutions stationnaires peuvent s'écrire : $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$ où

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(kx) \text{ et } E \text{ est l'énergie.}$$

c) Donner les valeurs de k et de E compatibles avec les conditions aux limites et montrer que les valeurs de E autorisées sont discrètes.

B.1.3 :

a) Sans faire un calcul détaillé, estimer un ordre de grandeur de Δp pour une particule dans le premier état.

b) En déduire un commentaire sur la valeur du premier niveau d'énergie trouvé, et expliquer pourquoi les niveaux d'énergie d'une particule confinée doivent être discrets.

c) On piège une particule de masse $m = 10^{-30}$ kg dans un puits d'extension $a = 1.5 \times 10^{-10}$ m. Calculer l'énergie de l'état fondamental et faire un commentaire sur l'ordre de grandeur obtenu.

B.2. Puits de potentiel asymétrique :

B.2.1 :

On considère une particule piégée dans le puits de potentiel de la figure 10 :

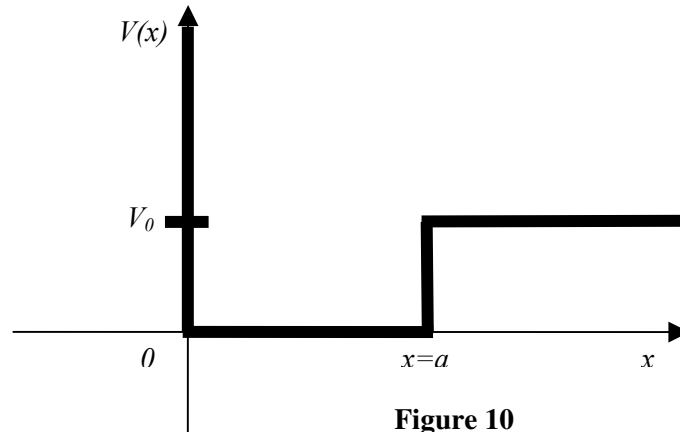


Figure 10

On cherche un état stationnaire de l'équation de Schrödinger de la forme $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$.

- Montrer que, malgré la discontinuité de V en $x = a$, ψ et sa dérivée $\frac{d\psi}{dx}$ sont continues.
- Montrer que, pour $E < V_0$, la fonction d'onde pour un état lié, ou localisé par le puits s'écrit :

$$\begin{cases} \psi(x) = A \sin(qx), & 0 < x < a \\ \psi(x) = B e^{-x/x_0}, & x > a \end{cases}$$

où :

$$E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}, \quad x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

Il n'est pas demandé de déterminer A et B .

- La solution met en évidence une longueur caractéristique x_0 . Donner une interprétation physique de x_0 . Existe-t-il une longueur équivalente pour une particule matérielle classique ? Donner un exemple de longueur analogue dans un autre domaine de la physique.

B.2.2 :

- Utiliser les conditions aux limites pour en déduire que le vecteur d'onde q doit

satisfaire à la relation : $\cotan(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$, $y = qa$, $\frac{\hbar^2 \gamma^2}{2ma^2} = V_0$.

- Tracer qualitativement les solutions graphiques de cette équation. On précisera en particulier la pente de la fonction g définie par $g(y) = -\frac{\sqrt{\gamma^2 - y^2}}{y}$ en $y = \gamma$.

B.2.3 :

- Montrer qu'aucun état lié n'existe pour des valeurs de V_0 inférieures à un seuil W que l'on exprimera.
- Donner une interprétation de l'existence de ce seuil.

B.2.4 :

- En prenant $V_0 = W + \varepsilon$, $\varepsilon \ll W$, montrer que $\gamma = \pi/2 + \delta$ où $\delta = \varepsilon\pi/4W$.
- En déduire graphiquement la valeur de y associée à l'état lié.
- Estimer $V_0 - E$ et montrer que $1/x_0 = \pi\delta/2a + O(\delta^2)$. Préciser la signification physique de la divergence de x_0 dans cette limite.

B.2.5 :

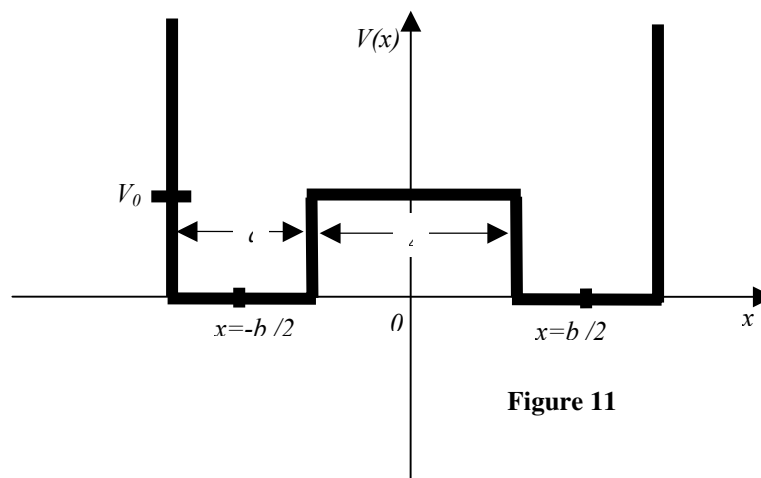
- Justifier l'utilisation de ce puits de potentiel pour modéliser le noyau de deutérium. Estimer la masse réduite des deux constituants du noyau de deutérium.
- L'énergie de liaison du proton et du neutron vaut 2.2 MeV. Que représente cette énergie dans le modèle précédent ?
- Il n'existe pas d'autres états liés pour le noyau de deutérium. En déduire les bornes inférieure et supérieure γ_{inf} et γ_{sup} pour γ .
- Expérimentalement on mesure $a \approx 1.5 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). Calculer les valeurs de V_0 correspondant à γ_{inf} et γ_{sup} et en déduire dans quel cas limite on se trouve.

B.2.6 :

- Montrer que, dans la limite $V_0 \rightarrow \infty$, le premier niveau d'énergie est : $E_1^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$.
- Pour $V_0 \gg W$, faire un développement limité de l'équation autour de ce résultat, en prenant $1/\gamma$ comme paramètre de perturbation. Calculer E_1 et x_0 au premier ordre en $1/\gamma$.
- Montrer que $E_1 < E_1^0$ et interpréter ce résultat à partir du principe d'incertitude de Heisenberg.

Section C : Double puits**C.1 :**

On considère une particule de masse m évoluant dans le double puits de la figure 11 :

**Figure 11**

- a) Dans la limite $V_0 \rightarrow \infty$ exprimer l'énergie du premier niveau, E_1^0 , et la dégénérescence g de ce niveau.
- b) Construire dans ce cas ($V_0 \rightarrow \infty$) une base de fonctions d'onde $\psi_{S/A}(x)$ associées avec les g états dégénérés qui sont symétriques (S) et antisymétriques (A) par rapport à l'opération $x \leftrightarrow -x$.
- c) Montrer que ψ_S et ψ_A sont orthogonaux.
- d) Pourquoi ce choix est-il adapté à la levée de dégénérescence quand V_0 devient fini ?

C.2 :

Pour V_0 fini, les fonctions d'onde pour les deux premiers niveaux d'énergie sont :

$$\psi_{S/A}(x) = \pm \alpha \sin(q(b/2 + a/2 + x)), \quad -b + \Delta/2 < x < -\Delta/2$$

$$\psi_S(x) = \beta \operatorname{ch}(x/x_0), \quad \psi_A(x) = \beta \operatorname{sh}(x/x_0), \quad -\Delta/2 < x < \Delta/2$$

$$\psi_{S/A}(x) = \alpha \sin(q(b/2 + a/2 - x)), \quad \Delta/2 < x < -\Delta/2 + b$$

où $E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$, $x_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$.

- a) Justifier ces expressions.
- b) Utiliser les conditions de continuité pour montrer que le vecteur d'onde q doit

$$\tan(qa) = -qx_0 \operatorname{coth}(\Delta/2x_0), \quad (S)$$

satisfaire à la relation :

$$\tan(qa) = -qx_0 \operatorname{th}(\Delta/2x_0), \quad (A)$$

C.3 :

- a) Dans la limite où $x_0 \ll \Delta$ et $V_0 \gg E$, montrer qu'on peut réécrire ces expressions sous la forme :

$$\tan(y) = -\frac{y}{\sqrt{\gamma^2 - y^2}} \varepsilon_{S/A}, \quad y = qa, \quad \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2ma^2} = V_0, \quad \varepsilon_{S/A} = 1 \pm 2 \exp(-\gamma \Delta / a)$$

où l'indice « S » (resp. « A ») représente la solution avec fonction d'onde symétrique (resp. antisymétrique).

- b) Commenter les similitudes et différences entre ces résultats et ceux de la question **B.2.2**.
- c) Tracer qualitativement la solution graphique donnant les premiers niveaux symétrique et antisymétrique.

- d) Calculer la valeur $y = y_0$ dans la limite $V_0 \rightarrow \infty$. Montrer que, au voisinage de cette limite, on peut écrire $\tan(y) \approx -\frac{y}{\gamma} \varepsilon_{S/A}$. Développer cette expression près de $y = y_0$ pour montrer que les niveaux d'énergie sont :

$$E_{S/A} \approx E_1 \mp A, \quad E_1 = E_1^0 (1 - 2/\gamma), \quad A = \frac{4E_1^0}{\gamma} \exp(-\gamma \Delta / a)$$

- e) Compte tenu de la forme des fonctions d'onde, expliquer pourquoi l'état (S) est d'énergie inférieure à l'état (A).

- f) À partir du principe d'incertitude justifier que E_S est inférieure à E_1 . Commenter la variation de A en fonction de Δ .

C.4 :

On considère un système de deux puits de potentiel pour lequel la séparation Δ peut varier. Pour tenir compte de la répulsion à courte portée des deux puits il faut ajouter aux énergies $E_{S/A}$ un terme $f(\Delta)$ traduisant cette répulsion.

- Justifier qualitativement que, pour l'état (S), il peut exister une valeur de Δ finie minimisant l'énergie totale du système à double puits.
- Etudier de même le cas de l'état (A).
- À partir de ces résultats définir une énergie de cohésion.
- Citer un exemple de système dont l'énergie de cohésion peut être décrite par un modèle de ce type. Existe-t-il un équivalent classique à cette énergie ?

C.5 :

On revient à la situation de **C.3**, avec Δ imposé. On définit les éléments de matrice $A_{\alpha\beta}$, pour un opérateur \hat{A} par $A_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\alpha}^*(x) \hat{A} \psi_{\beta}(x) dx$.

- Montrer que dans la base formée par ψ_A et ψ_S , l'Hamiltonien est représenté par une matrice diagonale.
- Montrer qualitativement que les fonctions d'onde $\psi_{D/G} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S \pm \psi_A)$ décrivent les situations où la particule est principalement localisée respectivement dans les puits de droite ou de gauche.
- Montrer que les fonctions d'onde ψ_G et ψ_D forment également une base orthonormée.
- Montrer que, dans cette base, $\hat{H} = E_1 I - A \hat{T}$ où \hat{T} est un opérateur de « saut » : $\hat{T} \psi_G = \psi_D$, $\hat{T} \psi_D = \psi_G$ et \hat{I} l'opérateur identité. Exprimer la matrice représentant \hat{T} dans la base formée par ψ_G et ψ_D .

C.6 :

À l'instant $t = 0$ une particule se trouve localisée dans le puits de droite, décrite par la fonction d'onde $\psi(x, t = 0) = \psi_D$.

- Écrire l'expression de $\psi(x, t)$ et donner un temps caractéristique, τ , pour trouver la particule localisée principalement à gauche, dans un état décrit par ψ_G .
- Comment τ varie-t-il avec Δ ?
- Expliquer dans quelle situation un tel modèle peut décrire une molécule d'ammoniac.
- Dans ce cas, on peut estimer que $A \approx 0.5 \times 10^{-4} eV$. Calculer τ .