

J. 4432

**78.0.1**

*repère à reporter sur la copie*

**SESSION DE 2001**

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : sciences physiques**

option : physique

composition de physique

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*Tout document et de tout autre matériel électronique sont interdits.*

**Tournez la page S.V.P.**

# INTERACTIONS MATIERE - RAYONNEMENT

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet aborde, dès la partie A, quelques aspects des interactions entre la matière et le rayonnement électromagnétique (échanges d'énergie, d'impulsion ou de moment cinétique). Les parties B et C introduisent un traitement classique du magnétisme atomique et de la résonance magnétique. Les règles de quantification des moments cinétiques sont abordées et exploitées dans la partie D ; cependant, le formalisme de la mécanique quantique n'est véritablement utilisé que dans la partie E (résonance magnétique des protons).

La longueur du sujet ne doit pas décourager les candidats; une large indépendance de ses cinq parties, la progressivité de chacune d'entre elles, la diversité des thèmes abordés permettront à chacun, en évitant d'éventuels blocages, de révéler sa compréhension de la Physique dans des domaines variés. Toutefois, il doit rester clair qu'un traitement superficiel de quelques questions dans chaque partie sera peu valorisé.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

\*\*\*\*\*

Dans toute la suite,  $(R_0)$  désigne le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen.  $(Ox, Oy, Oz)$  est un système d'axes orthogonaux, fixes dans  $(R_0)$ .

Sauf mention contraire, les particules matérielles font l'objet d'une étude non-relativiste.

### Notations, données numériques et formulaire :

Constante de Boltzmann  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante de Planck  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Charge élémentaire  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Magnéton de Bohr  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Masse de l'électron  $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Masse du proton  $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Célérité de la lumière dans le vide  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Longueur d'onde Compton de l'électron  $\Lambda = \frac{h}{m_e c} = 2,426 \cdot 10^{-2} \text{ \AA} = 2,426 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{V_{\text{int}}} \text{div} \vec{A} \, d\tau$$

# A . Energie, impulsion et moment cinétique du rayonnement électromagnétique

## 1. Energie électromagnétique

1.1 On considère une particule ponctuelle, de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$  dans  $(R_0)$ , située au point  $M$  à l'instant  $t$ . Rappeler l'expression de la force de Lorentz subie par cette particule, s'il règne en  $M$  à l'instant  $t$  un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  créé par les autres charges et courants.

1.2 Rappeler la forme des équations de Maxwell ; on notera  $\rho$  et  $\vec{j}$  les densités volumiques de charge et de courant .

1.3 Etablir, à partir des équations de Maxwell, la formulation locale du principe de conservation de la charge .

1.4 Quelle est l'expression de la puissance volumique cédée, dans  $(R_0)$ , par le champ électromagnétique à la matière ( on pourra, si on le souhaite, s'aider de la puissance cédée par le champ électromagnétique à une charge ponctuelle  $q$  ) ?

1.5 On note dans la suite  $\vec{R}$  le vecteur de Poynting et  $u$  la densité volumique d'énergie électromagnétique.

1.5.1 Exprimer la formulation locale de la conservation de l'énergie ( identité de Poynting ), reliant  $\vec{R}$ ,  $u$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ .

1.5.2 Montrer que, dans le cas d'un régime périodique, la puissance moyenne entrant par rayonnement à travers une surface fermée, fixe dans  $(R_0)$ , est intégralement cédée à la matière contenue dans le volume intérieur à cette surface.

1.6.1 Rappeler les expressions de  $\vec{R}$  et de  $u$  en fonction des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  .

1.6.2 Vérifier la compatibilité de ces valeurs avec l'identité de Poynting , établie au 1.5.1 .

## 2. Impulsion du rayonnement électromagnétique

### 2.1 Impulsion cédée à la matière : approche ondulatoire

On considère l'interaction entre une onde électromagnétique plane progressive harmonique, de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , se propageant dans le vide selon la direction et le sens de  $Oz$ , et une particule ponctuelle  $M$  de charge  $q$  et de masse  $m$ , animée - sous l'action de la force de Lorentz et d'autres forces non décrites ici - d'un mouvement sinusoïdal forcé dans  $(R_0)$ , de période  $T$ , dans le plan  $z = 0$ , au voisinage du point  $O$ . La polarisation de l'onde et le mouvement forcé ne sont pas nécessairement rectilignes .

Déterminer l'impulsion cédée, en une période, par le champ à la particule ( sans recourir à la notion de photon ) ; on exprimera le résultat en fonction du vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  de l'axe  $Oz$ , de la célérité  $c$  de la lumière dans le vide, et de l'énergie  $W$  fournie, dans  $(R_0)$ , par le champ à la particule en une période.

## 2.2 Impulsion et énergie du photon

2.2.1 Rappeler le lien entre l'impulsion et l'énergie d'un photon .

2.2.2 Montrer la cohérence des résultats des questions 2.1 et 2.2.1.

## 2.3 Pression de radiation sur une surface parfaitement réfléchissante

2.3.1.  $\alpha$  Etablir, dans le cas de l'incidence normale, le lien entre la pression de radiation exercée par des photons, tous de même énergie, sur une surface parfaitement réfléchissante, fixe dans ( $R_0$ ), et la densité volumique totale  $u$  d'énergie électromagnétique .

2.3.1.  $\beta$  L'expression obtenue est-elle encore vérifiée lorsque les photons ne sont pas tous de même énergie (l'incidence restant normale) ?

2.3.2 Que devient cette relation, dans le cas où l'angle d'incidence est  $\theta$  ?

2.3.3 Les impulsions des photons sont maintenant orientées de façon aléatoire ; montrer que la pression de radiation est alors égale au tiers de la densité volumique totale  $u$  d'énergie électromagnétique .

2.3.4 On applique le résultat du 2.3.3 au rayonnement en équilibre thermodynamique, à l'intérieur d'une enceinte fermée de volume  $V$ , en admettant en outre que la densité volumique d'énergie  $u$  ne dépend que de la température  $T$ .

2.3.4.  $\alpha$  Exprimer la différentielle  $dU$  de l'énergie interne du rayonnement en fonction de  $V$ , de  $u(T)$ , de sa dérivée  $u'(T)$ , et des différentielles  $dV$  et  $dT$  .

2.3.4.  $\beta$  En déduire la différentielle  $dS$  de l'entropie  $S(T, V)$  du rayonnement .

2.3.4.  $\gamma$  Montrer que  $u(T)$  est proportionnelle à  $T^4$  .

## 3. **Collisions élastiques photons-électrons**

**Dans toute cette partie A.3 , l'analyse est relativiste .**

### 3.1. Effet Compton

On envoie sur des électrons d'un bloc de matière un pinceau de rayons X sensiblement monochromatiques, de longueur d'onde  $\lambda_0$  .

3.1.1 A quelle condition les électrons peuvent-ils être considérés comme libres, avant l'interaction avec les photons X ?

3.1.2 Etablir la relation donnant le décalage  $\delta\lambda$  de longueur d'onde des photons diffusés, en fonction de l'angle  $\theta$  que fait la direction de diffusion avec le pinceau incident, et de la longueur d'onde Compton  $\Lambda$  de l'électron.

3.1.3.  $\alpha$  Que peut-on dire du décalage relatif de longueur d'onde lorsque l'énergie des photons incidents est très petite devant  $m_e c^2$  ?

3.1.3.  $\beta$  Faire, dans ce cas, un commentaire relatif à l'énergie et à l'impulsion du photon.

### 3.2. Diffusion Thomson

Dans le rayonnement diffusé, on observe - outre la raie Compton - une composante dite de Thomson.

3.2.1 Rappeler les caractéristiques de sa répartition de longueur d'onde .

3.2.2 Comment peut-on interpréter cette répartition ?

#### 4. Collisions inélastiques photons-matière

Dans toute cette partie A.4 , l'analyse est relativiste , et on nomme, pour un atome au repos,  $E_0 = m_0 c^2$  l'énergie totale de l'atome dans son niveau fondamental - noté 0 - et  $E_1 = m_1 c^2$  l'énergie totale de l'atome dans un état excité donné - noté 1 - . On pose :  $\nu_{01} = \frac{E_1 - E_0}{h}$  .

##### 4.1. Absorption de photons

4.1.1 Trouver la condition pour qu'un photon de fréquence  $\nu$  soit absorbé, au cours de la transition  $0 \rightarrow 1$  , par l'atome initialement immobile dans son état fondamental .

4.1.2 Exprimer  $\frac{\nu - \nu_{01}}{\nu_{01}}$  en fonction de  $\nu_{01}$  ,  $m_0$  ,  $h$  et  $c$  .

##### 4.2. Emission de photons

4.2.1 De même, déterminer la fréquence  $\nu'$  d'un photon émis, au cours de la transition  $1 \rightarrow 0$  , par l'atome initialement immobile dans l'état excité 1 .

4.2.2 Exprimer  $\frac{\nu' - \nu_{01}}{\nu_{01}}$  en fonction de  $\nu_{01}$  ,  $m_1$  ,  $h$  et  $c$  .

##### 4.3 Expérience de résonance optique

4.3.1 Proposer des ordres de grandeur pour  $E_0 = m_0 c^2$  et pour  $h\nu_{01} = E_1 - E_0$  dans le cas des transitions optiques .

4.3.2 Donner, en le justifiant, l'ordre de grandeur de la largeur relative (due à l'effet Doppler) des raies spectrales d'une vapeur portée, à basse pression, à une température voisine de 500 K.

4.3.3 Conclure sur la possibilité de mener, dans ce cas, une expérience de résonance optique

#### 5. Moment cinétique du rayonnement : approche ondulatoire

On revient, dans cette partie, à la situation physique évoquée au A 2.1, reprenant les mêmes hypothèses et notations .

5.1 On note  $\sigma_{Oz}$  la valeur algébrique de la projection sur Oz du moment cinétique en O, point fixe dans  $(R_0)$ , cédé par le champ à la particule M en une période.

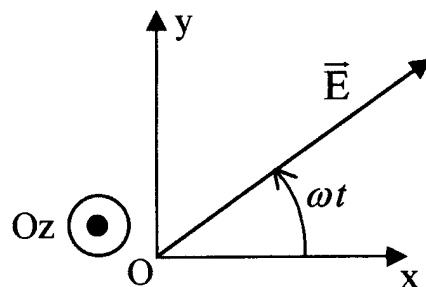
5.1.1 En utilisant le résultat établi dans la question A 2.1 , prouver que la valeur de  $\sigma_{Oz}$  est indépendante du choix de la position du point O .

5.1.2 Montrer que  $\sigma_{Oz} = -q \int_0^T \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}(z=0,t)) dt$  .

5.2 Dans cette question, l'état de polarisation de l'onde étudiée est circulaire gauche (voir figure ci-contre) .

5.2.1 Relier  $\frac{d\overrightarrow{E}(z=0,t)}{dt}$  à  $(\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}(z=0,t))$  .

5.2.2 En intégrant par parties, trouver la relation entre  $\sigma_{Oz}$  et l'énergie W cédée , dans  $(R_0)$  , par le champ à la particule M en une période.



5.2.3 En déduire le moment cinétique selon Oz des photons associés à cet état de polarisation .

5.3 Donner, sans nouveau calcul, le moment cinétique selon Oz des photons associés à l'état de polarisation circulaire droit .

5.4 Pour un état de polarisation rectiligne, que donne la mesure du moment cinétique des photons selon Oz ?

## B . Approche classique du magnétisme atomique

Dans toute la suite, on se limite aux milieux diamagnétiques ou paramagnétiques .

On s'intéresse au comportement moyen d'un grand nombre d'atomes supposés identiques, soumis à un champ magnétique uniforme et permanent.

En l'absence de précision contraire, les interactions entre atomes ne seront pas prises en compte ; en particulier, on négligera le champ magnétique qu'ils créent .

### 1. Moment magnétique orbital électronique

En moyenne sur des durées de l'ordre de grandeur des périodes des mouvements orbitaux, on peut

associer un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge q \vec{v}$  au « mouvement orbital » d'un électron

autour du noyau ;  $q = -e$  est la charge de l'électron situé en M à l'instant  $t$ ,  $\vec{v}$  sa vitesse, et le noyau

- supposé fixe - est situé en O, origine du référentiel  $(R_o)$  .

1.1 Montrer que les moments magnétique et cinétique orbitaux en O obéissent à la relation  $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$  où  $\gamma$ , valeur du rapport gyromagnétique dans le cas orbital, est une fonction - que l'on déterminera - de la charge élémentaire  $e$  et de la masse  $m_e$  de l'électron.

1.2 Calculer numériquement  $\gamma$  .

### 2. Théorème de Larmor

2.1 Donner l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire  $\omega_e$  dans  $(R_o)$  d'un électron externe, l'ordre de grandeur  $r$  de la distance noyau-électron étant  $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$  .

2.2 L'atome est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$  uniforme et permanent dans  $(R_o)$ , avec  $B_o = 1 \text{ T}$  .

2.2.1 On considère le référentiel  $(R)$ , animé dans  $(R_o)$  d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Oz , de vecteur-rotation  $\vec{\Omega}$  ; comment doit être choisi ce vecteur-rotation  $\vec{\Omega}$  pour que la résultante des forces (y compris celles d'inertie) subies dans  $(R)$  par l'électron ne fasse plus intervenir sa vitesse relative ? Dans la suite, on note  $\vec{\Omega}_L$  la valeur correspondante de  $\vec{\Omega}$  .

2.2.2.  $\alpha$  Calculer la norme de  $\overline{\Omega_L}$  .

2.2.2.  $\beta$  Comparer cette norme à  $\omega_e$  et commenter .

2.3 Montrer qu'avec ce choix de  $\overline{\Omega}$  , la relation fondamentale de la dynamique, écrite dans (R), est pratiquement (sur le plan numérique) la même que celle écrite dans (R<sub>0</sub>) en l'absence de champ  $\overline{B_0}$  .  
Le référentiel (R) est, pour cette valeur  $\overline{\Omega_L}$  de  $\overline{\Omega}$  , nommé référentiel de Larmor et noté (R<sub>L</sub>) .

### 3. Effet Zeeman classique

Dans cette partie B 3 , l'atome est encore plongé dans le champ  $\overline{B_0}$  ; ( OX<sub>L</sub> , OY<sub>L</sub> , OZ<sub>L</sub> ) est un système d'axes liés au référentiel tournant (R<sub>L</sub>) de Larmor, OZ<sub>L</sub> étant confondu avec Oz .  
On donne les composantes fondamentales de Fourier des coordonnées X<sub>L</sub>, Y<sub>L</sub> et Z<sub>L</sub> du mouvement - supposé périodique dans (R<sub>L</sub>) - d'un électron , le noyau étant encore à l'origine :

$$X_L = X_o \cos(\omega_e t + \alpha_o) ; Y_L = Y_o \cos(\omega_e t + \beta_o) ; Z_L = Z_o \cos(\omega_e t + \gamma_o) .$$

3.1 Montrer que ce mouvement peut être considéré, toujours dans (R<sub>L</sub>) , comme la superposition d'un mouvement rectiligne sinusoïdal et de deux mouvements circulaires centrés sur le noyau, de vecteurs-rotations orbitaux respectivement égaux à  $\overline{\omega_e u_Z}$  et à  $-\overline{\omega_e u_Z}$  . Concernant les mouvements circulaires, on pourra introduire la grandeur complexe  $\underline{X_L} = X_L + iY_L$  (avec  $i^2 = -1$ ) ; on ne cherchera pas à déterminer les valeurs précises des rayons et angles polaires associés à ces mouvements circulaires .

3.2.1 On effectue une observation spectroscopique, dans une direction quelconque fixe dans le référentiel (R<sub>0</sub>) du laboratoire.

Quelles sont les fréquences des raies observées ?

3.2.2 Calculer la valeur du rapport  $\frac{\Delta \nu}{B_0}$  ,  $\Delta \nu$  étant la largeur totale du spectre .

3.3 Les mesures expérimentales sont-elles en accord avec les résultats obtenus à l'aide de ce modèle classique :

$\alpha$  . du point de vue des ordres de grandeur ?

$\beta$  . du point de vue du nombre de raies observées ?

3.4.1 On rappelle que le pouvoir de résolution spectrale d'un interféromètre de Fabry-Perot vaut :

$P_{RS} = p \cdot F$  , où p est l'ordre d'interférence et F la finesse :  $F = \frac{\pi R^{1/2}}{1-R}$  (R étant le coefficient de réflexion en intensité) .

3.4.2.  $\alpha$  Avec R = 0,99 et une épaisseur e' de l'ordre du centimètre , un spectromètre de Fabry-Perot a-t-il, dans le visible, un pouvoir de résolution suffisant pour séparer, en incidence normale, les composantes Zeeman si B<sub>0</sub> est de l'ordre du Tesla ?

3.4.2.  $\beta$  Quelle est alors la différence d'ordre d'interférence entre la fréquence centrale et l'une des deux autres fréquences ?

3.4.2.  $\gamma$  Qu'observe-t-on si on fait croître progressivement l'épaisseur e' de 0 à 1 cm ?

## C . Approche classique de la résonance magnétique

Dans la suite, on note  $\gamma$  le rapport gyromagnétique, qui n'est pas nécessairement égal à  $\gamma_{classique} = -\frac{e}{2m_e}$ .  $\gamma$  est supposé indépendant du temps.

### 1. Effet gyroscopique

On soumet un moment magnétique atomique  $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$  placé en O à un champ magnétique, uniforme et permanent dans  $(R_0)$ :  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  ( $B_0 > 0$ ).

1.1 Que peut-on dire de la résultante des forces magnétiques subies par ce dipôle ?

1.2.1.  $\alpha$  Rappeler l'expression du moment en O des forces subies par ce dipôle.

1.2.1.  $\beta$  Rappeler l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ  $\vec{B}_0$ .

1.2.2 Indiquer quelles doivent être la direction et le sens de  $\vec{M}$  pour qu'il y ait équilibre stable.

**Dans la suite, on suppose la direction de  $\vec{M}$  quelconque.**

1.3.1 Montrer que  $\|\vec{M}\|$  est une constante.

1.3.2.  $\alpha$  Montrer que  $M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$  est une constante.

1.3.2.  $\beta$  Que peut-on dire de l'angle entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}_0$  ?

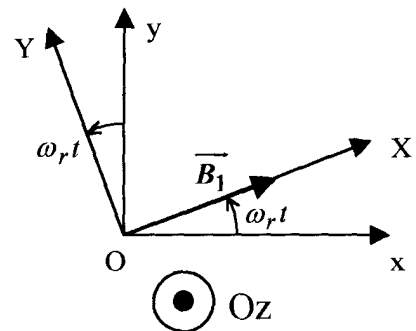
1.4.1 Déterminer le vecteur-rotation  $\vec{\omega}_0$  associé à la précession de  $\vec{M}$  autour du champ  $\vec{B}_0$ .

1.4.2 Commenter ce résultat dans le cas où  $\gamma = \gamma_{classique} = -\frac{e}{2m_e}$ .

### 2. Première interprétation « classique » d'une expérience de résonance paramagnétique électronique

On superpose au champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  un petit champ magnétique  $\vec{B}_1$  uniforme, perpendiculaire à Oz et tournant à la vitesse angulaire  $\omega_r$  positive :  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$  (voir figure ci-contre) ;  $B_1$  est constant, positif et faible devant  $B_0$ .

On note  $(R_1)$  le référentiel lié aux axes OX, OY et Oz, animé par rapport à  $(R_0)$  d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz, à la vitesse angulaire positive  $\omega_r$  ; on suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , les axes Ox et OX sont confondus.



**On veillera à ne pas confondre** ce référentiel  $(R_1)$  avec le référentiel  $(R_L)$  de Larmor, qui n'est plus utile dans la suite de l'étude.



On pose :  $\omega_0 = -\gamma B_0$  ,  $\overrightarrow{\Delta\omega} = (\omega_r - \omega_0) \overrightarrow{u_z}$  et  $\overrightarrow{\omega_1} = -\gamma \overrightarrow{B_1}$  .

2.1 Evaluer  $\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0}$  .

2.2 En déduire la valeur de  $\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_1}$  .

2.3.1 Que peut-on dire du vecteur  $(\overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\Delta\omega})$  dans le référentiel  $(R_1)$  ?

2.3.2 Evaluer la tangente de l'angle  $\theta$  que fait  $(\overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\Delta\omega})$  avec l'axe Oz ;  $\theta$  est choisi entre 0 et  $\pi$  .

2.4 A  $t = 0$ , on suppose que  $\vec{M}_{(t=0)} = M' \overrightarrow{u_z}$  . Comment doit-on choisir  $\omega_r$  pour que  $M_z = \vec{M} \cdot \overrightarrow{u_z}$  oscille entre les deux valeurs opposées  $-M'$  et  $+M'$  ?

**On suppose que cette condition (dite de résonance) est réalisée dans toute la suite de cette partie C.2 .**

2.5 Que vaut alors la période des oscillations de  $M_z$  ?

2.6 En déduire **sans aucun calcul** que, si l'on tient compte des phénomènes de relaxation ( temps caractéristique noté  $\tau$  ), la norme  $B_1$  du champ tournant ne doit pas être trop faible, pour que  $M_z$  oscille entre deux valeurs sensiblement égales à  $-M'$  et  $+M'$  , durant les premières pseudo-périodes .

2.7 Le champ  $\overrightarrow{B_1}$  est remplacé par un champ  $\overrightarrow{B_2}$  alternatif, de direction fixe dans  $(R_0)$  :  $\overrightarrow{B_2} = 2B_1 \cos(\omega_r t) \overrightarrow{u_x}$  ; expliquer pourquoi, à la résonance, l'évolution de  $\vec{M}$  reste la même, sur une durée de l'ordre de la période déterminée au 2.5 .

**Dans la suite, l'étude sera poursuivie avec le champ permanent  $\overrightarrow{B_0}$  et le champ tournant  $\overrightarrow{B_1}$  .**

### 3. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

Dans cette partie C 3 ,  $\vec{M}$  désigne en fait la moyenne des moments magnétiques des atomes d'un échantillon paramagnétique donné ( ce moment  $\vec{M}$  est donc proportionnel au vecteur-aimantation - supposé uniforme - de l'échantillon ) .

On nomme  $\vec{M}_0 = M_0 \overrightarrow{u_z}$  la valeur de  $\vec{M}$  à l'équilibre thermique en présence du seul champ  $\vec{B}_0$  ( la détermination de la valeur de  $M_0$  n'est pas demandée ) .

On suppose que la valeur de  $\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0}$  est la somme de deux contributions :

- l'une, déjà étudiée, due aux champs  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$  , appliqués à partir de l'instant  $t = 0$  ;
- l'autre, égale à  $\frac{M_0 - M}{\tau}$  , due aux phénomènes de relaxation .

On n'impose, a priori, aucune condition sur la valeur de  $\omega_r$ , ni sur celle du produit  $\omega_1 \tau$ .

3.1 Ecrire les « équations de Bloch », reliant les grandeurs  $M_z$ ,  $u = \vec{M} \cdot \vec{u}_X$  et  $v = \vec{M} \cdot \vec{u}_Y$  - composantes du vecteur  $\vec{M}$  selon les axes tournants OX et OY de  $(R_1)$  - leurs dérivées temporelles, le temps de relaxation  $\tau$ ,  $\Delta\omega = \omega_r - \omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $M_0$ .

3.2 Si  $t \gg \tau$ , on peut se contenter de l'étude du régime permanent - ou établi - dans lequel les composantes  $M_z$ ,  $u$  et  $v$  ne dépendent plus du temps.

Les valeurs stationnaires de  $u$  et  $v$  sont :

$$u = -M_0 \frac{\omega_1 \Delta\omega \tau^2}{1 + (\Delta\omega \tau)^2 + (\omega_1 \tau)^2}, \text{ et } v = -M_0 \frac{\omega_1 \tau}{1 + (\Delta\omega \tau)^2 + (\omega_1 \tau)^2}.$$

3.2.1.  $\alpha$  On suppose que, par détection et traitement des signaux, on peut, en faisant très lentement varier  $\omega_r$ , accéder expérimentalement à la courbe donnant une grandeur proportionnelle à  $v$  en fonction de  $\omega_r$  (balayage en fréquence);  $B_0$  et  $B_1$  étant supposés connus, quels renseignements peut-on tirer de cette courbe ?

3.2.1.  $\beta$  Dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situe la fréquence de résonance paramagnétique électronique, si  $B_0 = 1 \text{ T}$  ?

3.2.2 Le principe physique de la détection est le phénomène d'induction électromagnétique, qui engendre une f.é.m. dans une bobine fixe dans le référentiel  $(R_0)$ ;  $M_0$  étant proportionnel à  $B_0$  pour une substance paramagnétique en « champ faible », étudier comment l'amplitude de la f.é.m. induite au centre de la résonance varie selon la valeur de  $B_0$ , celle de  $B_1$  étant donnée.

3.2.3.  $\alpha$   $B_0$  étant donné, la valeur maximale obtenue pour  $|v|$  dans le balayage en fréquence dépend-elle de  $B_1$  ?

3.2.3.  $\beta$  Quelle est la valeur optimale de  $B_1$ , de ce point de vue ?

3.2.4 Peut-on considérer que la résonance magnétique est sans effet si  $\omega_1 \tau \gg 1$  ?

3.3 Evaluer la puissance cédée, en moyenne, par le champ tournant à un atome de la substance paramagnétique, pour une valeur quelconque du produit  $\omega_1 \tau$ .

3.4 On peut étudier, par un procédé voisin, le phénomène de résonance magnétique nucléaire (avec un champ tournant dans le sens horaire, lorsque  $\gamma$  est positif). Le « spectre RMN » obtenu est semblable à celui mentionné au C.3.2 pour la composante  $v$ , dans le cas où  $\omega_1 \tau \ll 1$ .

On suppose que deux types de noyaux de rapports gyromagnétiques  $\gamma$  proches, et de temps de relaxation voisins, sont présents dans l'échantillon étudié.

3.4.1 Caractériser l'ordre de grandeur de la valeur minimale détectable de  $\delta\gamma = |\gamma_2 - \gamma_1|$ , si  $\tau \approx 1 \text{ s}$ ,  $\gamma = 26,75 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{T}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $B_0 = 2,35 \text{ T}$ .

3.4.2 Commenter le résultat obtenu.

3.4.3 Que peut nous apprendre un léger glissement de la « fréquence RMN » de la raie caractéristique d'un type de noyau donné,  $B_0$  étant supposé connu.

## D . Quantification des moments cinétiques

### 1. Expérience de Stern et Gerlach

1.1 A quelle condition le champ magnétique peut-il provoquer une déviation des atomes, fonction de la composante  $M_z$  de leur moment magnétique ?

1.2 Evaluer l'ordre de grandeur de la déviation d'un jet atomique thermique, connaissant - outre celui du magnéton de Bohr - les ordres de grandeurs suivants :

- Longueur  $\ell$  sur laquelle est appliqué le champ magnétique : 1 cm
- Distance L entre le milieu de l'entrefer et l'écran de détection : 1 m
- Ordre de grandeur de  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  :  $10^3 \text{ T.m}^{-1}$
- Ordre de grandeur de la température T du jet atomique : 500 K

1.3.1 Lorsque Stern et Gerlach ont effectué cette expérience avec des atomes d'argent, combien de taches ont-ils observées ?

1.3.2 Comment étaient-elles situées par rapport à la tache obtenue en champ nul ?

1.4 Préciser, sans justification, quelles étaient les valeurs de  $M_z$  correspondantes .

### 2. Règles de quantification des moments cinétiques

Dans toute la suite, on pose - par souci d'allègement -  $\vec{\sigma} = \hbar \vec{J}$  où  $\hbar$  est la constante réduite de Planck :  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

2.1 Rappeler, sans démonstration, les résultats possibles de la mesure de  $\vec{J}^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$  ; on introduira le nombre quantique J, en précisant quelles peuvent être ses valeurs .

2.2 Le nombre quantique J étant donné, rappeler, sans démonstration, les résultats possibles de la mesure de  $J_z = \vec{J} \cdot \vec{u}_z$  ,  $Oz$  étant un axe a priori quelconque ; on introduira le nombre quantique  $m_J$  , en précisant quelles peuvent être ses valeurs .

### 3. Facteur de Landé

On rappelle que le rapport gyromagnétique  $\gamma$  est défini par la relation :  $M_z = \gamma \sigma_z$  .

On suppose, pour l'instant, que le champ magnétique est nul.

Le facteur de Landé g est défini par la relation :  $\gamma = g \gamma_{classique}$  avec  $\gamma_{classique} = -\frac{e}{2m_e}$  , e étant

la charge élémentaire et  $m_e$  la masse de l'électron.

3.1 Que vaut g dans le cas d'un moment cinétique orbital ?

3.2 Que vaut g dans le cas d'un moment cinétique de spin ?

3.3 Dans le cas du couplage spin-orbite d'un atome, on introduit les nombres quantiques suivants :

- S : nombre quantique de spin, associé à  $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}_S}{\hbar}$  ;
- L : nombre quantique orbital, associé à  $\vec{L} = \frac{\vec{\sigma}_L}{\hbar}$  ;
- J : associé à  $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L} = \frac{\vec{\sigma}_S + \vec{\sigma}_L}{\hbar} = \frac{\vec{\sigma}}{\hbar}$  ;
- $m_J$  : nombre quantique « magnétique », associé à la projection  $J_z = \vec{J} \cdot \vec{u}_z$  .

3.3.1 Les nombres quantiques S et L étant donnés, rappeler, sans démonstration, quelles sont les valeurs possibles de J .

3.3.2 Rappeler, sans démonstration, les résultats possibles des mesures de  $\vec{L}^2$  et  $\vec{S}^2$  en fonction des nombres quantiques L et S .

3.4 Dans cette question et dans la question 3.5, on cherche à retrouver l'expression du facteur de Landé dans le cadre du seul modèle vectoriel : **aucun raisonnement quantique n'est requis.**

**Les trois nombres quantiques L, S et J sont supposés non nuls, dans les questions 3.4 et 3.5 .**

Du fait du couplage spin-orbite, on suppose que :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = a \vec{S} \wedge \vec{L}$  et  $\frac{d\vec{S}}{dt} = a \vec{L} \wedge \vec{S}$  .

3.4.1 Montrer que le vecteur  $\vec{J}$  est bien constant.

3.4.2 Montrer que les produits scalaires  $\vec{L} \cdot \vec{J}$  et  $\vec{S} \cdot \vec{J}$  sont constants.

3.4.3 Montrer, par ailleurs, que les vecteurs  $\vec{L}$  et  $\vec{S}$  précessent autour du vecteur constant  $\vec{J}$  .

3.4.4 Etablir que  $\langle \vec{L} + 2\vec{S} \rangle$  est colinéaire à  $\vec{J}$ , la notation  $\langle \rangle$  désignant ici la moyenne temporelle sur une période de précession.

3.4.5 Evaluer le produit scalaire  $\vec{S} \cdot \vec{J}$  en fonction de S, L et J ; on pourra représenter le triangle  $(\vec{L}, \vec{S}, \vec{J})$ .

3.4.6 Dans le cadre du modèle vectoriel, on définit  $\gamma$  simplement par la relation entre moyennes temporelles  $\langle \vec{M} \rangle = \gamma \langle \vec{\sigma} \rangle$  . Sachant que, par ailleurs,  $\langle \vec{M} \rangle = \gamma_{class} \langle \vec{\sigma}_L + 2\vec{\sigma}_S \rangle$ , retrouver l'expression du facteur de Landé g en fonction de L, S et J .

3.5 On applique maintenant à l'atome un champ magnétique permanent **faible**  $\vec{B}_0$  colinéaire à Oz.

3.5.1 Indiquer sans calcul comment évoluent  $\vec{L}, \vec{S}$ , et  $\vec{J}$  (non colinéaires à  $\vec{B}_0$ ) .

3.5.2 Si on raisonne sur des durées plus importantes, que peut-on dire des valeurs moyennes de  $\vec{M}$  et de  $\vec{\sigma}$  ?

#### 4. Retour sur l'expérience de Stern et Gerlach

La structure électronique de l'atome d'argent dans l'état fondamental est la suivante :  $1s^2; 2s^2, 2p^6; 3s^2, 3p^6, 3d^{10}; 4s^2, 4p^6, 4d^{10}; 5s^1$ .

4.1.1 Indiquer, sans démonstration, les valeurs de L, S et J dans ce cas.

4.1.2 Donner la représentation spectroscopique de cet état fondamental de Ag.

4.2 Interpréter les résultats expérimentaux évoqués dans les questions D 1.3.1 et D 1.4.

4.3 Quels résultats donne l'expérience de Stern et Gerlach avec des vapeurs de métaux alcalins ?

#### 5. Effet Zeeman en champ magnétique « faible »

On applique à un atome un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  suffisamment faible pour qu'on puisse considérer son action sur l'atome comme une perturbation par rapport aux interactions au sein de l'atome (y compris l'interaction spin-orbite).

##### 5.1 Levée de dégénérescence

Dans cette question, L, S et J sont donnés ; on note  $E_0$  l'énergie de l'atome en l'absence de champ magnétique appliqué (la valeur de  $E_0$  est indépendante de  $m_j$ ), et g le facteur de Landé.

5.1.1 Représenter, sur une même figure, les graphes des énergies des sous-niveaux Zeeman en fonction de  $B_0$ , lorsque  $J = 1$  (on pourra introduire le magnéton de Bohr  $\mu_B$ ).

5.1.2 Représenter, sur une même figure, les graphes des énergies des sous-niveaux Zeeman en fonction de  $B_0$ , lorsque  $J = 3/2$ .

5.2 On considère maintenant deux niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2$  ( $E_2 > E_1$ ) en l'absence de champ magnétique appliqué ;  $J_1, m_{J_1}$  et  $g_1$  (facteur de Landé) sont les notations relatives au niveau 1 ;

$J_2, m_{J_2}$  et  $g_2$  (facteur de Landé) sont les notations relatives au niveau 2.

On applique le champ  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  faible.

On considère une transition entre un sous-niveau  $m_{J_2}$  de l'état 2 et un sous-niveau  $m_{J_1}$  de l'état 1.

5.2.1 Préciser à quel type de mouvement de la théorie classique (voir question B.3 : effet Zeeman classique) correspond chacun des trois cas de la règle de sélection :  $m_{J_2} - m_{J_1} = \delta m = -1, +1$  (transitions  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$ ), ou 0 (transition  $\pi$ ).

5.2.2 On suppose, dans toute cette question 5.2.2, que  $J_1$  est égal à  $J_2$ .

5.2.2.  $\alpha$  Donner la liste des fréquences des radiations émises en fonction de  $\delta m$ ,  $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ ,

$\delta \nu_o = \frac{\mu_B B_0}{h}$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ , et  $m = m_{J_1}$  (on classera ces fréquences par valeurs croissantes de  $\delta m$ ).

5.2.2.  $\beta$  Lorsque  $g_1$  est différent de  $g_2$ , y a-t-il toujours une raie centrale ( $\nu = \nu_{12}$  avec  $\delta m = 0$ ) ?

5.2.2.  $\gamma$  Que peut-on dire du nombre de raies lorsque  $g_1 = g_2$  ?

5.2.2.  $\delta$  Lorsque  $g_1 = g_2$ , à quelle condition supplémentaire retrouve-t-on l'effet Zeeman classique évoqué au B 3 ?

5.2.3 On suppose, dans cette question 5.2.3, que  $J_1 = J_2 = 3/2$  et que  $g_2 - g_1$  est non nul, mais de valeur absolue petite devant  $g_2$ .

5.2.3.  $\alpha$  Indiquer la nature de l'observation spectroscopique (nombre de raies, liste des fréquences) dans une direction perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ .

5.2.3.  $\beta$  Préciser les états de polarisation, dans ces mêmes conditions d'observation.

5.2.3.  $\gamma$  Indiquer la nature de l'observation spectroscopique dans la direction de  $\vec{B}_0$ .

### 5.3 Retour sur la résonance paramagnétique électronique

Un atome subit, grâce au phénomène de résonance paramagnétique électronique, une transition entre deux sous-niveaux Zeeman d'un même niveau, de facteur de Landé noté  $g$ .

5.3.1 Donner la valeur de la composante  $\sigma_z$  selon Oz du moment cinétique du photon absorbé ou émis,  $\gamma$  étant négatif ( donc  $g$  positif ).

5.3.2 Ce résultat est-il en accord avec le sens de rotation du champ tournant  $\vec{B}_1$ , évoqué lors du calcul « classique » de la partie C 2 ?

## 6 **Etude de l'aimantation paramagnétique**

### 6.1 Calcul de Brillouin du vecteur-aimantation

L'étude porte sur un ensemble d'atomes identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$  et peuplant, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann correspondant à la température  $T$ , les  $(2J+1)$  sous-niveaux Zeeman évoqués au D.5.

On note  $n$  le nombre d'atomes par unité de volume et  $\vec{\mathfrak{M}}$  le vecteur-aimantation.

Montrer que  $\vec{\mathfrak{M}} = ng \frac{\mu_B}{2} \left[ (2J+1) \coth \frac{(2J+1)x}{2} - \coth \frac{x}{2} \right] \vec{u}_z$ , avec  $x = g \beta \mu_B B_0$  et  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,

$g$  étant le facteur de Landé et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr.

### 6.2 Examen de quelques cas-limites

6.2.1.  $\alpha$  Que devient le vecteur-aimantation  $\vec{\mathfrak{M}}$  dans le cas où le paramètre  $x$  est très supérieur à 1 ? Commenter.

6.2.1.  $\beta$  Cette condition  $x \gg 1$  peut-elle être réalisée expérimentalement ( ordres de grandeur de  $B_0$  et de  $T$  ) ?

6.2.2 Dans le cas où  $x$  est très inférieur à 1, montrer que l'on retrouve la loi de Curie  $\vec{\mathfrak{M}} = \frac{C}{T} \vec{B}_0$  et évaluer la constante de Curie  $C$  en fonction de  $n$ ,  $g$ ,  $\mu_B$ ,  $k_B$  et  $J$ ; on rappelle que, pour

$$x' \ll 1, \quad \text{th} x' \approx x' - \frac{x'^3}{3}.$$

6.2.3 Indiquer, **sans calcul**, pour quelles valeurs de  $J$  les résultats obtenus par Brillouin se rapprochent de ceux ( non demandés ici ) obtenus par le calcul classique de Langevin.

### 6.3 Cas particulier de N spins discernables : étude thermodynamique statistique

On se place dans le cas particulier  $L = 0$  ,  $S = 1/2$  ,  $J = 1/2$  ,  $g = 2$  . On pose  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  .

6.3.1.  $\alpha$  Etablir la relation entre la fonction de partition  $Z_N = \sum_r \exp(-\beta E_r)$  de l'ensemble des N spins discernables , la fonction de partition individuelle  $\xi$  d'un spin , et le **nombre total N de spins** ( on pourra préalablement exprimer  $Z_N$  en fonction de  $Z_{N-1}$  et de  $\xi$  ) .

6.3.1.  $\beta$  En déduire que  $Z_N$  vérifie la relation :  $\ln(Z_N) = N f(y)$  , avec  $y = \beta \mu_B B_0$  , où  $f$  est une fonction que l'on déterminera .

6.3.2.  $\alpha$  Rappeler l'expression de l'entropie statistique  $\bar{S}$  en fonction des probabilités  $P_r$  des états propres du hamiltonien de l'ensemble des N spins, et de la constante de Boltzmann  $k_B$  .

6.3.2.  $\beta$  En déduire que :  $\bar{S} = k_B \left( \beta \sum_r E_r P_r + \ln Z_N \right)$  .

6.3.3 Montrer que  $\bar{S} = N k_B [f(y) - y f'(y)]$  ,  $f$  étant la fonction définie à la question 6.3.1.  $\beta$  .

6.3.4.  $\alpha$  Montrer que  $\bar{S}(y)$  est une fonction décroissante .

6.3.4.  $\beta$  Préciser et **interpréter** les comportements limites de  $\bar{S}(y)$  pour  $\mu_B B_0 \ll k_B T$  , puis pour  $\mu_B B_0 \gg k_B T$  .

6.3.5 Etudier l'évolution de la température de l'ensemble des N spins lorsqu'on provoque la désaimantation adiabatique, par diminution lente de la valeur de  $B_0$  .

6.3.6 Dans la réalité, la diminution de T n'est pas aussi importante. Quelle raison peut-on invoquer, pour expliquer ce fait ?

6.4 Indiquer, sans justification, l'ordre de grandeur de la température qu'on peut atteindre expérimentalement par ce procédé, appliqué à une substance dotée de paramagnétisme électronique.

6.5 A température T plus élevée, on donne, avec  $\mu_B B_0 \ll k_B T$  :  $T d\bar{S}_v = -B_0 d\bar{\mathfrak{I}} + c_{\mathfrak{I}} dT$  ,  
 $\bar{S}_v$  étant l'entropie par unité de volume,  $\bar{\mathfrak{I}}$  et  $B_0$  étant liés par la loi de Curie  $\bar{\mathfrak{I}} = \frac{C}{T} \bar{B}_0$  et  $c_{\mathfrak{I}}$  étant la capacité thermique volumique à  $\bar{\mathfrak{I}}$  constante.

6.5.1 A partir de l'état initial  $(B_0 = B_i, T = T_i)$  , on procède à une désaimantation isentropique jusqu'à l'état final, pour lequel  $(B_0 \approx 0, T = T_f)$  . Déterminer le rapport  $\frac{T_f}{T_i}$  ,  $c_{\mathfrak{I}}$  étant supposée constante dans le domaine de température  $T_f < T < T_i$  .

6.5.2 Montrer que,  $B_i$  étant donné, ce procédé de refroidissement est plus efficace lorsque la température  $T_i$  est faible .

## E . Etude quantique de la résonance magnétique des protons

Le rapport gyromagnétique  $\gamma$  d'un noyau est noté sous la forme  $g \frac{e}{2 m_p}$ , où  $m_p$  est la masse du proton . Dans le cas du proton,  $g = 5,588$  et, avec les notations introduites au D.3 ,  $L = 0$  ,  $S = 1/2$  et, par conséquent,  $m_S = \pm \frac{1}{2}$  . On notera que  $\gamma$  est ici positif .

On nomme « magnéton nucléaire » la quantité  $\mu_n = \frac{e \hbar}{2 m_p}$  .

On rappelle que l'opérateur  $A^\dagger$  , adjoint de l'opérateur  $A$  , vérifie la relation suivante, valable pour tout  $|\varphi\rangle$  et pour tout  $|\psi\rangle$  :  $\langle \psi | A^\dagger | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle^*$  ,  $z^*$  désignant le complexe conjugué de  $z$  .

Un opérateur est dit hermitique s'il est auto-adjoint, donc s'il vérifie :  $A^\dagger = A$  .

On rappelle enfin que, si  $|\varphi\rangle = A |\psi\rangle$  , alors  $\| |\varphi\rangle \|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle$  .

De la même manière que le hamiltonien  $H$ , chaque composante  $S_x, S_y$ , ou  $S_z$  de l'opérateur  $\vec{S}$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  liée à  $(R_0)$  est un opérateur hermitique ; en outre, on rappelle la définition de l'opérateur  $\vec{S}^2$  :  $\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$  . On travaille dans l'espace propre de  $\vec{S}^2$ , de dimension 2 .

**Le rayonnement est ici traité classiquement** : contrairement à celles de l'opérateur  $\vec{S}$ , les composantes du champ magnétique sont des fonctions scalaires (ici de la seule variable temporelle), et non des opérateurs .

On rappelle les propriétés suivantes :

- $[S_x, S_y] = (S_x S_y - S_y S_x) = i S_z$
- $[S_y, S_z] = (S_y S_z - S_z S_y) = i S_x$
- $[S_z, S_x] = (S_z S_x - S_x S_z) = i S_y$ .

1. Vérifier que  $\vec{S}^2$  commute bien avec  $S_z$  , c'est-à-dire :  $[\vec{S}^2, S_z] = 0$  .

De même, on a :  $[\vec{S}^2, S_x] = 0$  et  $[\vec{S}^2, S_y] = 0$  .

2.1 On pose :  $S_+ = S_x + i S_y$  et  $S_- = S_x - i S_y$  .  $S_x, S_y$  et  $S_z$  sont - on l'a vu - des opérateurs hermitiques ; est-ce le cas pour les opérateurs  $S_+$  et  $S_-$  ?

2.2 Montrer que  $S_-$  est l'opérateur adjoint de  $S_+$  .

2.3 Exprimer l'opérateur produit  $S_+ S_-$  en fonction des opérateurs  $\vec{S}^2$  ,  $S_z$  et  $S_z^2$  .

2.4 Exprimer l'opérateur produit  $S_- S_+$  en fonction des opérateurs  $\vec{S}^2$  ,  $S_z$  et  $S_z^2$  .



3 On note, dans toute la suite,  $|-\rangle$  un ket, vecteur propre normé des opérateurs  $\overline{S^2}$  et  $S_z$ , associé aux valeurs propres respectives  $\frac{3}{4}$  et  $m_S = -\frac{1}{2}$ .

3.1.  $\alpha$  Montrer que  $[S_z, S_+] = S_+$ .

3.1.  $\beta$  En déduire que  $S_+|-\rangle$  est vecteur propre de l'opérateur  $S_z$ , de valeur propre  $m_S = +\frac{1}{2}$ .

3.2.  $\alpha$  Montrer que  $[\overline{S^2}, S_+] = 0$

3.2.  $\beta$  En déduire que  $S_+|-\rangle$  est vecteur propre de l'opérateur  $\overline{S^2}$ , de valeur propre égale à  $\frac{3}{4}$ .

3.3 Dans la suite, on pose :  $|+\rangle = S_+|-\rangle$ ; en évaluant, par deux méthodes,  $\langle -|S_z|+\rangle$ , montrer que l'on a :  $\langle -|+\rangle = 0$ .

3.4 Montrer que,  $|-\rangle$  étant normé,  $|+\rangle$  l'est aussi.

4. En évaluant  $\|S_+|+\rangle\|^2$ , montrer que  $S_+|+\rangle$  est le ket nul.

5. Déduire des résultats précédents la matrice représentant  $S_+$  dans la base orthonormale  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ .

6. En déduire la matrice représentant  $S_-$  dans la même base orthonormale.

7. Le champ  $\overline{B}_0 = B_0 \overline{u}_z$  est encore permanent, et le champ  $\overline{B}_1$ , orthogonal à  $\overline{B}_0$ , tourne dans le sens rétrograde autour de Oz; on pose :  $(\overline{Ox}, \overline{B}_1) = -\omega_r t$ , avec  $\omega_r > 0$ .

Le hamiltonien du système est :  $H(t) = -\overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{B}}(t) = -\gamma \hbar \overline{\mathbf{S}} \cdot (\overline{B}_0 + \overline{B}_1(t)) = -g \mu_n \overline{\mathbf{S}} \cdot (\overline{B}_0 + \overline{B}_1(t))$ .

7.1 Exprimer H(t) en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega_0 = \gamma B_0$ ,  $\omega_1 = \gamma B_1$ ,  $t$  et des trois opérateurs  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$ .

7.2 Montrer que la matrice représentant H(t) dans la base orthonormale des kets  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  vaut :

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\omega_0 & -\omega_1 \exp(+i\omega_r t) \\ -\omega_1 \exp(-i\omega_r t) & +\omega_0 \end{pmatrix}.$$

7.3 On pose, dans la suite,  $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$  et suppose qu'à  $t=0$ ,  $|\psi_{(t=0)}\rangle = |+\rangle$ .

Indiquer sans calcul ce que représente physiquement, avec cette condition initiale, la quantité  $|\langle -|\psi(t)\rangle|^2 = P_{\pm}(t)$ .

7.4 Pour étudier  $P_{\pm}(t)$ , on propose de résoudre l'équation de Schrödinger en utilisant le changement de variables :  $b_+(t) = a_+(t) \exp\left(-i \frac{\omega_r}{2} t\right)$  et  $b_-(t) = a_-(t) \exp\left(+i \frac{\omega_r}{2} t\right)$ .

7.4.1 A quoi correspond, dans la théorie classique, ce changement de variables ?

7.4.2 Montrer que  $b_+(t)$  et  $b_-(t)$  obéissent à :

$$\begin{cases} i \frac{db_+(t)}{dt} = + \frac{\delta\omega}{2} b_+(t) - \frac{\omega_1}{2} b_-(t) \\ i \frac{db_-(t)}{dt} = - \frac{\omega_1}{2} b_+(t) - \frac{\delta\omega}{2} b_-(t) \end{cases} \quad \text{avec } \delta\omega = \omega_r - \omega_o .$$

7.4.3 En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction  $b_-(t)$ .

7.4.4 Calculer  $b_-(t)$ , compte tenu des conditions initiales.

7.5 En déduire la formule de Rabi :  $P_{\pm}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\delta\omega)^2} \sin^2 \left[ \sqrt{\omega_1^2 + (\delta\omega)^2} \frac{t}{2} \right]$ .

7.6.1 Comment doit-on choisir  $\omega_r$  pour que l'amplitude des oscillations de  $P_{\pm}(t)$  soit maximale ?

7.6.2 Commenter le résultat.

7.7 Montrer que la pulsation des oscillations de  $P_{\pm}(t)$  peut être reliée à :

$$\vec{B}_{\text{efficace}} = \vec{B}_o + \vec{B}_1(t) - \frac{\omega_r}{\gamma} \vec{u}_z .$$

\*\*\*\*\*