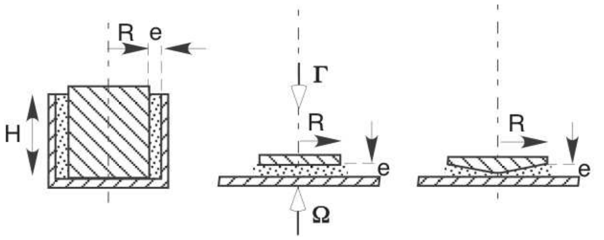
Agrégation de physique 2009–2010

Mécanique des fluides → exercices pour les 3 séances

Tristan Baumberger

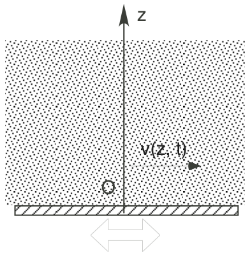
Rhéométrie — Un rhéomètre est un appareil servant à caractériser la résistance au cisailement d'un fluide, pas nécessairement newtonien. Il est constitué de deux pièces de symétrie cylindrique autour d'un même axe. L'une ("rotor") est entraînée à une vitesse angulaire Ω constante tandis qu'on mesure le couple Γ nécessaire pour maintenir l'autre ("stator") fixe.



1. Établir la relation entre Γ et Ω dans le cas d'un fluide newtonien de viscosité dynamique η pour les trois géométries suivantes :
   - "Couette cylindrique" : rotor et stator sont deux cylindres coaxiaux de hauteur H et de rayons respectifs R et $R + e$ avec $e \ll R$.
   - "plan-plan" : stator plan ; rotor disque plan de rayon R, parallèle au stator et distant de $e \ll R$.
   - "cône-plan" : stator plan ; rotor tronconique de rayon R, en contact (virtuel) par son sommet avec le stator dont il est séparé au maximum par $e \ll R$.
2. A.N. Calculer Γ pour l'eau, dans chacune des trois géométries, avec $\dot{\gamma} = \Omega R/e = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = H = 20$ mm. Quelle-est la signification physique de $\dot{\gamma}$?
3. Quel inconvénient présente la géométrie plan-plan dans le cas d'un fluide non-newtonien ? Pourquoi le plan-cône convient-il ?

Diffusion visqueuse — Une plaque plane, d'extension infinie, submergée ($z > 0$) par un fluide newtonien de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, est animée d'un mouvement oscillant dans son plan : $V = V_0 \cos(\omega t)$.

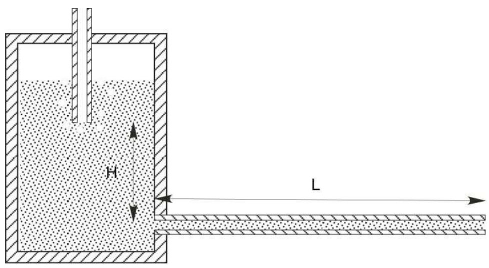
1. Établir l'équation différentielle dont est solution le champ de vitesse $v(z, t)$ parallèle au plan.
2. Quelle est la nature (physique) de cette équation ? Quelle est la signification (physique) du coefficient dit de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$? Quelle est donc sa dimension ?



3. Après avoir précisé les conditions aux limites, chercher (et trouver) les solutions de l'équation sous la forme $v(z,t) = \Re[\tilde{V}(z)\exp(i\omega t)]$.

4. Commenter les solutions trouvées et donner la signification (physique) de la grandeur $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Analogies ?

Vidange — Un candidat met en œuvre le dispositif représenté ci-dessous. La longueur du tube horizontal est L, son rayon interne est R. Le fluide est de l'eau.



1. Quel-est le rôle du tube vertical plongeant dans le réservoir et mettant celui-ci en communication avec l'atmosphère ?

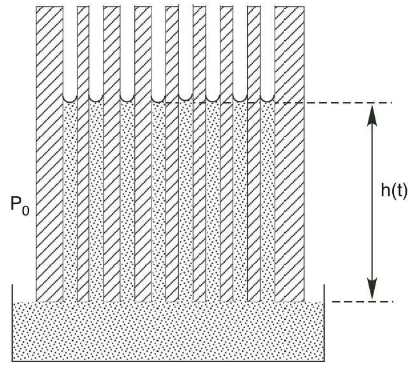
2. Le candidat annonce qu'il va vérifier la loi de Poiseuille. Quelle est son idée ? Un membre du jury griffonne fébrilement ; que contrôle-t-il ?

3. Établir les lois de vidange du réservoir dans deux cas limites bien identifiés.

Imprégnation d'un poreux — On cherche à légitimer la loi de Washburn (1921) qui indique que la quantité de liquide absorbé par un poreux est proportionnelle à la racine carrée du temps d'imbibition. On modélise un poreux de section d'aire $\mathcal{A}$ par N capillaires parallèles de rayon R. La base du poreux est mise en contact avec un fluide de viscosité dynamique η, de masse volumique ρ et de tension de surface γ mouillant parfaitement les capillaires (ménisque hémisphérique).

1. Quelle est la hauteur d'ascension h_∞ à l'équilibre (Loi de Jurin).

2. On suppose que le régime transitoire est quasi-stationnaire, i.e. qu'on peut négliger l'inertie du fluide. Quelle est alors l'équation différentielle reliant le champ de vitesse $v_z(r,z)$ au champ de pression $P(z)$ dans le fluide ? On pourra introduire une pression effective $P^\star = P + \rho g z$. Quel-est le profil de vitesse dans le tube ?



3. Calculer de deux façons différentes le débit volumique $\mathcal{Q}$ dans le tube lorsque la hauteur du ménisque est $h(t)$.

4. Montrer que la hauteur d'ascension est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho g R^2}{8\eta} \frac{h_\infty - h}{h}$$

   Dans quelle limite retrouve-t-on la loi de Washburn ?

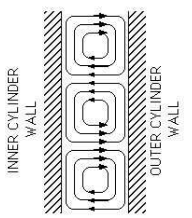
5. Que vous inspire cette dépendance en $t^{1/2}$?

Instabilité de Taylor-Couette — L'expérience (*cf.* manip N 570 de la collection) montre que, dans certaines conditions, l'écoulement de Couette cylindrique est instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales de son champ de vitesse. On propose une analyse qualitative de ce phénomène.

1. Donner l'expression du champ de vitesse lorsque le cylindre intérieur de rayon R est en rotation à la vitesse angulaire Ω tandis que l'extérieur de rayon $R + e$, $e \ll R$ reste fixe.

2. Quelle force compense la force centrifuge qui s'exerce sur une particule fluide située sur une trajectoire de rayon r ?

3. Cette particule, par suite d'une fluctuation, se retrouve sur un trajectoire voisine $(r + \delta r)$ avec sa vitesse orthoradiale inchangée. Quel-est alors le nouveau bilan des forces radiales ? Commenter. Peut-on ainsi comprendre pourquoi l'écoulement est toujours stable lorsque c'est le cylindre extérieur qui tourne ?



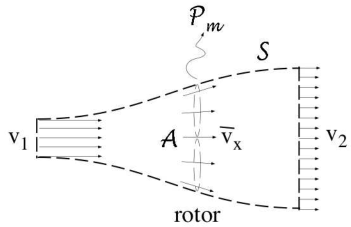
   Expliquer l'allure des trajectoires contra-rotatives de l'écoulement secondaire associé à l'instabilité.

4. En fait, l'instabilité n'apparaît qu'au delà d'une vitesse angulaire critique. En quoi la viscosité du fluide est-elle stabilisante ? Estimer le temps T_{in} qu'une particule fluide met à traverser le gap de la cellule. Estimer le temps T_{visc} associé à la diffusion visqueuse sur la même distance. Expliquer alors pourquoi l'apparition de l'instabilité est caractérisée par une valeur critique d'un nombre sans dimension, le nombre de Taylor Ta :

$$Ta = \frac{\Omega^2 e^3 R}{\nu^2}$$

Rendement optimal d'une éolienne — En 1919 l'allemand Albert Betz démontrait que le rendement maximal d'une éolienne était de $16/27 \sim 59\%$. On propose de retrouver ce résultat.

On considère une éolienne dont le rotor (hélice) balaie une surface d'aire $\mathcal{A}$. On a représenté sur la figure ci-dessous le tube de courant correspondant à l'air qui passe à travers le rotor en régime stationnaire. Loin en amont, la vitesse du vent non-perturbé par l'éolienne est v_1 : loin en aval, elle vaut v_2. Au niveau du rotor, la composante moyenne de la vitesse suivant l'axe Ox est $\overline{v}_x$. La masse volumique de l'air sera prise constante égale à sa valeur au repos ρ. On négligera toute dissipation d'énergie due à la viscosité de l'air.



1. Justifier l'allure du tube de courant.

2. Exprimer le débit volumique $\mathcal{Q}_v$, volume d'air traversant le rotor par unité de temps en fonction de $\mathcal{A}$ et $\overline{v}_x$. Justifier que ce débit est également celui qui entre et sort de la surface de contrôle $\mathcal{S}$ représentée sur la figure.

3. Quelle-est l'expression de la densité volumique d'énergie cinétique w_1 (resp. w_2) du vent en amont (resp. en aval) du rotor ?

4. Quel est le flux d'énergie cinétique entrant en amont dans la surface de contrôle $\mathcal{S}$? Quel est, de même, le flux sortant en aval ?

5. On suppose que la pression de l'air en amont *et* en aval du rotor est égale à la pression atmosphérique. Montrer que dans ces conditions, les forces de pression associées ne fournissent pas de travail net à la surface de contrôle $\mathcal{S}$. Qu'en est-il des forces internes ?

6. Déduire de ce qui précède que la puissance mécanique cédée par le vent au rotor est :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\rho\mathcal{A}\overline{v}_x(v_1^2 - v_2^2)$$

7. Quelle est la densité de quantité de mouvement π_{x1} (resp. π_{x2}) suivant Ox portée par le vent en amont (resp. en aval) du rotor ?

8. Montrer que le rotor exerce une force de freinage sur le vent :

$$F_x = \rho \mathcal{A} \bar{v}_x (v_2 - v_1)$$

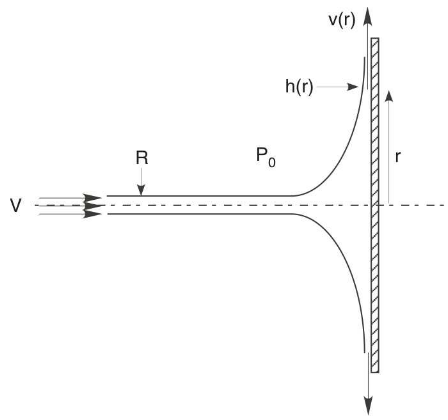
9. En exprimant cette fois la puissance cédée $\mathcal{P}_m$ à l'aide de F_x et $\bar{v}_x$, et en l'identifiant à l'expression trouvée à la question 6, montrer que :

$$\bar{v}_x = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

10. Quelle est la puissance $\mathcal{P}_0$ du vent passant à la vitesse v_1 à travers une surface d'aire $\mathcal{A}$ égale à l'aire balayée par le rotor ?

11. Exprimer et représenter graphiquement le rendement idéal de l'éolienne $\mathcal{R} = \mathcal{P}_m/\mathcal{P}_0$ en fonction du rapport $\phi = v_2/v_1$. Montrer que $\mathcal{R}$ présente un maximum pour $\phi = 1/3$ et en déduire la loi de Betz.

Splash ! — Un jet d'eau cylindrique de rayon R et de débit $\mathcal{Q}$ frappe un bouclier plan qui lui est perpendiculaire. On note F la force qu'on doit exercer sur la plaque pour la maintenir en place. On suppose l'écoulement partout laminaire. On néglige la dissipation visqueuse.



1. Établir les champs de pression $P(r)$ et de vitesse $v(r)$ dans le jet ainsi que l'épaisseur $h(r)$ de celui-ci pour $r \gg R$.

2. Calculer F. Proposer une application numérique.

3. Donner l'allure du champ de pression dans la zone $r \lesssim R$; en particulier, calculer la surpression au centre du jet.

Rotation locale *vs.* **rotation globale** — On définit les trois champs de vitesse bidimensionnels suivants :

- Couette plan :

$$\vec{v} = Sy\,\vec{e}_x$$

- Essoreuse
$$\vec{v} = \Omega r \, \vec{e}_\theta$$

- Maelström :
$$\vec{v} = \frac{1}{2\pi r}[\Gamma \, \vec{e}_\theta - \mathcal{Q} \, \vec{e}_r]$$

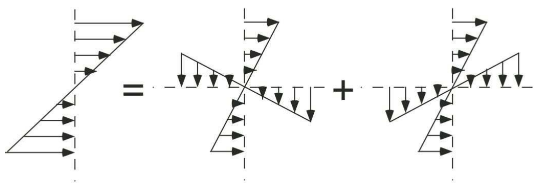
1. Représenter les lignes de courants.

2. Proposer une réalisation pratique de ces écoulements.

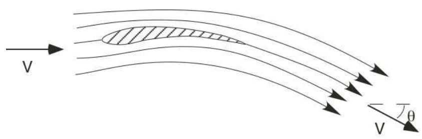
3. Calculer lorqu'ils sont définis, la divergence et le rotationnel de ces champs de vitesse. Commenter.

4. Calculer pour le maelström la circulation de $\vec{v}$ sur un contour fermé entourant O et le flux de $\vec{v}$ sortant d'un cylindre appuyé sur ce contour. Commenter.

5. Expliquer et commenter la décomposition suivante :



Portance d'une aile — On propose d'établir l'expression de la portance d'une aile à l'aide d'une méthode heuristique due à Tritton (Physical Fluid Dynamics, Oxford 1988).



1. Montrer que le rôle d'une aile est bien de dévier les filets d'air vers le bas.

2. On considère une aile très profilée, de longueur L et de largeur ℓ. Les vitesses sont $V + \delta v_-$ sur l'intrado et $V + \delta v_+$ sur l'extrado. Pourquoi $\delta v_+ < \delta v_-$?

3. Exprimer la portance F à l'aide de la différence entre les pressions p_- et p_+ sur les deux faces de l'aile, puis en faisant intervenir les survitesses.

4. Montrer que $F \simeq \rho L V \Gamma$. Que représente Γ ?

5. Toutes choses égales par ailleurs on double la vitesse V de l'aile ; comment varie la portance ?

6. Ce qui précède laisse penser qu'il y a toujours de la portance ; est-ce le cas ? Où se trouvent les hypothèses cachés ?