Préparation à l'Agrégation de Sciences Physiques
ENSP - Montrouge

François Levrier

Problème de mécanique

Précession du périhélie de Mercure

1er décembre 2005

Ce problème, qui est basé en partie sur celui posé au concours d'entrée à l'ENS en 1993, est consacré à l'étude de l'évolution lente des paramètres des orbites des planètes, en s'intéressant plus particulièrement à l'exemple de Mercure. Ces évolutions lentes, à l'échelle de la centaine de milliers d'années, portent le nom d'évolutions séculaires. Elles sont dues à l'attraction mutuelle des planètes, qui perturbe leur mouvement de Kepler autour du Soleil. Ces perturbations, qui agissent en particulier sur l'excentricité des orbites elliptiques, seront examinées à l'ordre le plus bas.

Le problème est organisé de la manière suivante:
La première partie est consacrée à l'établissement des équations et relations valables dans le cas du mouvement keplerien, ainsi qu'à la mise en place du problème à n corps. La deuxième partie présente la méthodologie des perturbations séculaires, et son application à l'étude de l'évolution de l'excentricité de Mercure. La troisième partie porte sur un raffinement du modèle permettant de calculer plus correctement l'influence perturbatrice des planètes extérieures. Enfin, la quatrième et dernière partie présente le calcul de l'avance du périhélie de Mercure dans le cadre de la théorie de la relativité générale, sans bien sûr qu'une connaissance quelconque de celle-ci soit nécessaire.

Dans tout le problème, on se placera dans un référentiel centré sur le Soleil S, et fixe par rapport à la sphère céleste. Ce référentiel sera supposé galiléen et muni d'un système d'axes $(Sxyz)$ formant un trièdre trirectangle direct, de vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$ et $\boldsymbol{u}_z$. On supposera que le plan (Sxy) est celui de l'écliptique, contenant les trajectoires des différentes planètes, qui seront donc supposées coplanaires. Chaque planète sera assimilée à une sphère homogène, et repérée par son rayon vecteur $\boldsymbol{r}_i$ par rapport au Soleil, de coordonnées cartésiennes (x_i, y_i) et de coordonnées polaires (r_i, θ_i), étant entendu que l'axe polaire $\theta_i = 0$ est confondu avec l'axe (Sx). En première approximation, la trajectoire d'une planète i est une orbite keplerienne, décrite dans le sens direct $\dot{\theta}_i > 0$, avec une vitesse $\boldsymbol{v}_i$. On notera m_i les masses des planètes et $M_\odot$ celle du Soleil, avec bien entendu $m_i \ll M_\odot$. Pour simplifier les équations, on posera $\alpha = GM_\odot$ et $\alpha_i = Gm_i$. De plus, on notera $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$ le vecteur reliant la planète i à la planète j, et r_{ij} son module. Enfin, dans le cas où l'on ne considérera qu'une seule planète en orbite autour du Soleil, on pourra se passer des indices.

On rappelle la formule du double produit vectoriel: $\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

Les intégrales elliptiques complètes du premier ordre $K(m)$ et du deuxième ordre $E(m)$ sont

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}} \qquad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

On a alors les relations

$$(1+x)K(x) = K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\left[\frac{E(x)}{1-x^2} - K(x)\right]$$

On donne ci-dessous les valeurs numériques qui pourront servir dans les calculs:

Planète	m ($M_\odot$)	a (UA)	T (années)	e
Mercure	$1.66013679\ 10^{-7}$	0.38709893	0.2408	0.20523069
Venus	$2.44783959\ 10^{-6}$	0.72333199	0.6152	0.00677323
Terre	$3.04043274\ 10^{-6}$	1.00000011	1.0000	0.01671022
Mars	$3.22714936\ 10^{-7}$	1.52366231	1.8809	0.09341233
Jupiter	$9.54790662\ 10^{-4}$	5.20336301	11.862	0.04839266
Saturne	$2.85877644\ 10^{-4}$	9.53707032	29.458	0.05415060
Uranus	$4.35540070\ 10^{-5}$	19.19126393	84.01	0.04716771
Neptune	$5.17759138\ 10^{-5}$	30.06896348	164.79	0.00858587

Première partie
Préliminaires

$\boxed{\textbf{I - 1.}}$ On ne considère pour l'instant qu'une seule planète, en orbite autour du Soleil. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au centre de masse de la planète s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Montrer que le vecteur $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ est constant. Exprimer le module σ de $\boldsymbol{\sigma}$ en coordonnées polaires, et donner son interprétation géométrique en terme d'aire balayée par le rayon vecteur.

$\boxed{\textbf{I - 2.}}$ En posant $u = r^{-1}$, montrer que la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\alpha}{\sigma^2}$$

$\boxed{\textbf{I - 3.}}$ En déduire que le trajectoire $r(\theta)$ de la planète est donnée par l'équation d'une cônique

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_p)}.$$

où p, e et θ_p sont des constantes, appelées respectivement paramètre de la cônique, excentricité et argument du périhélie.

$\boxed{\textbf{I - 4.}}$ L'énergie totale par unité de masse E est définie par

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Exprimer E à l'aide de l'équation polaire $r(\theta)$, en utilisant la valeur de $\dot{\theta}$ trouvée au **I - 1**. Montrer que E est constante, négative et en déduire que la trajectoire est une ellipse. Donner la valeur du demi grand axe de cette ellipse, noté a, en fonction du paramètre p et de l'excentricité. Exprimer σ, E, ainsi que la période T du mouvement, en fonction de a, e et α.

$\boxed{\textbf{I - 5.}}$ On définit le vecteur $\boldsymbol{e}$ par

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\sigma}}{\alpha} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Montrer que ce vecteur est constant au cours du mouvement. En l'explicitant en un point particulier de la trajectoire, montrer que $\boldsymbol{e}$ a pour coordonnées cartésiennes $(e\cos\theta_p, e\sin\theta_p)$. On nommera par la suite $\boldsymbol{e}$ vecteur excentricité.

I - 6. On considère maintenant n planètes P_i, avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Écrire les équations du mouvement des planètes, en incluant les attractions gravitationnelles mutuelles.

I - 7. On définit l'énergie totale E_i par unité de masse et le vecteur excentricité $\boldsymbol{e}_i$ de la planète P_i par les mêmes formules qu'aux questions précédentes lorsqu'on négligeait l'interaction des planètes. Montrer que les dérivées de E_i et $\boldsymbol{e}_i$ par rapport au temps s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}E_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\neq i} \alpha_j \frac{\boldsymbol{r}_{ij}.\boldsymbol{v}_i}{r_{ij}^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j\neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha}\left[\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \wedge (\boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{v}_i) + \boldsymbol{v}_i \wedge \left(\boldsymbol{r}_i \wedge \frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right)\right].$$

Vérifier que ces quantités sont bien conservées lorsqu'aucune planète P_j ne vient perturber l'orbite de P_i.

Deuxième partie
Perturbations séculaires

Les énergies E_i et les vecteurs excentricité $\boldsymbol{e}_i$, constants lors des mouvements des planètes P_i supposées seules, ou "mouvements non perturbés", varient à cause de leurs attractions mutuelles, suivant les lois trouvées en **I - 7**. On note formellement ces lois sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = G(\{\boldsymbol{r}_i\}, \{\boldsymbol{v}_i\}),$$

où X représente l'ensemble des quantités constantes lors du mouvement keplerien non perturbé (énergie, excentricité, ...) et G la perturbation due à l'attraction mutuelle. On utilise une méthode perturbative:

(1) On remplace, dans la perturbation G, les trajectoires exactes par les trajectoires non perturbées, étudiées dans la première partie.

(2) On désire étudier l'évolution des grandeurs X sur un temps long. Aussi introduit-on la moyenne dans le temps d'une quantité quelconque Y, notée $\langle Y\rangle$ et définie simplement par

$$\langle Y\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau Y(t)\mathrm{d}t.$$

On remplace alors la quantité G par $\langle G\rangle$ et l'on écrit donc

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \langle G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)\rangle \,.$$

(3) Une fois la perturbation G calculée à l'aide des trajectoires non perturbées et moyennée dans le temps, le résultat ne peut dépendre que des grandeurs X elles-mêmes. On obtient alors une équation d'évolution de ces grandeurs X, sur une échelle de temps longue cette fois. Traitées de cette façon, on appelle les perturbations obtenues perturbations séculaires, et les évolutions des grandeurs X, évolutions séculaires.

II - 1. On considère une équation différentielle modèle, de la forme

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \epsilon\omega X(1 + \cos{(\omega t)}),$$

où $\epsilon \ll 1$ est un paramètre quantifiant la perturbation. Résoudre cette équation exactement, puis à l'aide de la procédure perturbative décrite ci-dessus. Comparer les résultats et commenter.

II - 2. Dans la suite, on considérera l'évolution séculaire des paramètres orbitaux (énergie et vecteur excentricité) attachés à une planète en particulier, qu'on notera P_1. Justifier que la procédure décrite ici permet de considérer la perturbation totale de E_1 et $\boldsymbol{e}_1$ comme une simple superposition linéaire des perturbations engendrées par chacune des autres planètes. On pourra donc se contenter de traiter le cas $n = 2$, ce qu'on fera dans la suite.

II - 3. On considère une fonction $g(\boldsymbol{r}_1)$ dépendant donc de la position de la planète P_1 seule. Montrer, à l'aide de **I - 1**, que la valeur moyenne $\langle g\rangle$, évaluée sur les trajectoires non perturbées, s'explicite en utilisant l'équation polaire $r(\theta)$, par une formule intégrale ne faisant intervenir que des fonctions de θ.

II - 4. En déduire qu'une telle moyenne $\langle g\rangle$ revient à remplacer la planète P_1 par une distribution de masse linéique $\mu(s)$, qu'on précisera, où s désigne l'abscisse curviligne le long de l'ellipse.

II - 5. Dans l'optique des questions **II - 9** et **II - 10**, on va calculer ici un certain nombre de moyennes sur les orbites non perturbées. On considère donc une planète seule, sur une orbite keplerienne de demi grand axe a et d'excentricité e, supposée petite devant un. Montrer alors qu'à l'ordre un en excentricité, et quels que soient les entiers $(p, q, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on a, en posant $k = p + q - n$,

$$\left\langle \frac{x^p y^q}{r^n} \right\rangle = \frac{a^k}{2\pi}\{I_{p,q} - (k+2)e[(\cos\theta_p)I_{p+1,q} + (\sin\theta_p)I_{p,q+1}]\},$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{x^p y^q}{r^n} \right\rangle = -\frac{\sigma a^{k-1}}{2\pi}\{I_{p,q+1} + e(\sin\theta_p)I_{p,q} - (k+2)e[(\cos\theta_p)I_{p+1,q+1} + (\sin\theta_p)I_{p,q+2}]\},$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{x^p y^q}{r^n} \right\rangle = \frac{\sigma a^{k-1}}{2\pi}\{I_{p+1,q} + e(\cos\theta_p)I_{p,q} - (k+2)e[(\cos\theta_p)I_{p+2,q} + (\sin\theta_p)I_{p+1,q+1}]\},$$

où les symboles $I_{p,q}$ désignent les intégrales

$$I_{p,q} = \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^p(\sin\theta)^q \mathrm{d}\theta.$$

On montre sans difficulté (on ne demande pas de le faire) que pour $0 \leqslant p+q \leqslant 5$, les seules intégrales non nulles de cette forme sont

$$I_{0,0} = 2\pi \quad ; \quad I_{2,0} = I_{0,2} = \pi \quad ; \quad I_{4,0} = I_{0,4} = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad I_{2,2} = \frac{\pi}{4}.$$

II - 6. En déduire en particulier qu'on a les moyennes suivantes:

$$\langle r^n \rangle = a^n \quad ; \quad \left\langle \frac{\boldsymbol{r}}{r^n} \right\rangle = \frac{n-3}{2a^{n-1}}\boldsymbol{e} \quad ; \quad \left\langle \frac{x^2}{r^n} \right\rangle = \left\langle \frac{y^2}{r^n} \right\rangle = \frac{a^{2-n}}{2} \quad ; \quad \left\langle \frac{xy}{r^n} \right\rangle = 0.$$

Concernant la seconde de ces relations, montrer que l'on peut retrouver le cas particulier $n = 3$ en utilisant l'équation du mouvement, ainsi que le cas particulier $n = 1$ en utilisant la définition du vecteur excentricité donnée au **I - 5**.

II - 7. On considère maintenant une fonction $G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2)$ dépendant des positions et des vitesses des deux planètes, évaluée sur les trajectoires non perturbées. Soient T_1 et T_2 les périodes respectives des mouvements de P_1 et P_2. Montrer que si le rapport T_1/T_2 est irrationnel, les moyennes se factorisent, c'est-à-dire que l'on a

$$\langle G \rangle = \lim_{\tau_1,\tau_2\to\infty} \frac{1}{\tau_1\tau_2}\int_0^{\tau_1} \mathrm{d}t_1 \int_0^{\tau_2} \mathrm{d}t_2 G[\boldsymbol{r}_1(t_1), \boldsymbol{v}_1(t_1); \boldsymbol{r}_2(t_2), \boldsymbol{v}_2(t_2)].$$

On pourra développer $G[\boldsymbol{r}_1(t_1), \boldsymbol{v}_1(t_1); \boldsymbol{r}_2(t_2), \boldsymbol{v}_2(t_2)]$ en double série de Fourier par rapport aux variables t_1 et t_2. On montrera ce résultat formellement, sans essayer d'en contrôler la rigueur mathématique. Appliquer ce résultat au cas où G se décompose en produit, en montrant que

$$\langle G_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1)G_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2) \rangle = \langle G_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{v}_1) \rangle \langle G_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_2) \rangle .$$

Pouvez vous indiquer pourquoi ces résultats ne subsistent pas si T_1/T_2 est rationnel?

On calcule dans les questions suivantes l'évolution séculaire des paramètres orbitaux d'une planète P_1, due à la perturbation apportée par une planète P_2, qui lui est externe, c'est-à-dire que $a_1 < a_2$. On supposera d'ailleurs que $a_1 \ll a_2$, et que d'autre part $m_1 \ll m_2$. Cette seconde hypothèse implique qu'on pourra négliger la perturbation de l'orbite de P_2 due à P_1, de sorte que le mouvement de P_2 sera supposé keplerien. On considèrera de plus que le rapport T_1/T_2 est irrationnel. Enfin, pour simplifier les notations, on posera le vecteur

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{r_{12}^3}.$$

II - 8. Développer $\boldsymbol{F}$ en puissances de r_1/r_2, jusqu'aux termes d'ordre deux inclus. Il est recommandé de garder des notations vectorielles.

II - 9. Montrer que $\langle \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}_1 \rangle = 0$, et que par conséquent l'énergie E_1 n'est pas sujette à des perturbations séculaires. En déduire que le demi grand axe a_1 reste constant, sur des temps assez longs.

II - 10. Montrer que l'évolution séculaire du vecteur excentricité $\boldsymbol{e}_1$ prend la forme

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{3}{4}\frac{\alpha_2}{\alpha}\frac{a_1}{a_2^3}\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \left(\boldsymbol{e}_1 - \frac{5}{4}\frac{a_1}{a_2}\boldsymbol{e}_2 \right).$$

II - 11. On rappelle que dans le cas considéré ici, on peut négliger la perturbation de l'orbite de P_2 et donc considérer $\boldsymbol{e}_2$ comme constant. Quelle est alors l'évolution séculaire du vecteur excentricité de P_1? Quelle courbe le vecteur $\boldsymbol{e}_1$ décrit-il, et en quel temps caractéristique? On exprimera ce temps en fonction des rapports a_1/a_2 et α_2/α, ainsi que de la période orbitale T_1.

II - 12. On considère dans cette question la perturbation de l'orbite de P_1 par $n-1$ planètes P_j, dont on supposera les orbites circulaires, de sorte que leurs excentricités sont nulles. Afin d'être dans les mêmes conditions que précédemment, on suppose que P_1 est la planète la plus interne au système, de sorte qu'on puisse effectuer le développement écrit au **II - 8**. Écrire l'équation d'évolution séculaire de $\boldsymbol{e}_1$ et donner son temps caractéristique en fonction de T_1, a_1, a_j, α et α_j.

$\boxed{\textbf{II - 13.}}$ Appliquer ce résultat au calcul de la vitesse angulaire de précession du périhélie de Mercure, notée ω_1, provoquée par l'influence des autres planètes du système Solaire. Donner le résultat numériquement en secondes d'arc par siècle. Comparer à la valeur observée qui est de 574,8 secondes d'arc par siècle.

Troisième partie

Raffinement du modèle

La méthode employée dans la deuxième partie revient à remplacer les différentes planètes par des distributions de masse linéiques. L'écart entre la précession du périhélie de Mercure ainsi calculée et celle observée oblige à raffiner le modèle. Pour cela, on ne moyennera que sur les trajectoires des planètes perturbatrices et on va calculer la force résultante sur la planète perturbée P_1, à chaque position de celle-ci. En somme, on évitera d'assimiler la planète perturbée à une telle distribution de masse, réservant ce traitement aux planètes perturbatrices.

$\boxed{\textbf{III - 1.}}$ On supposera dans cette partie que les planètes perturbatrices suivent des orbites circulaires, coplanaires à celle de P_1. Les distributions de masse linéiques introduites au **II - 4** sont alors

$$\mu_i(s) = \frac{m_i}{2\pi a_i} \quad \text{où } a_i \text{ est maintenant le rayon de la trajectoire de } P_i.$$

Montrer que le potentiel gravitationnel créé en $\boldsymbol{r}_1$ par la planète perturbatrice P_i s'écrit

$$\Phi_i(\boldsymbol{r}_1) = \frac{2\alpha_i}{\pi a_i} K\left(x_i\right) \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{r_1}{a_i}.$$

$\boxed{\textbf{III - 2.}}$ En déduire l'expression de la force par unité de masse $\boldsymbol{F}_i$ exercée par P_i sur la planète P_1, située en $\boldsymbol{r}_1$. Montrer en particulier que cette force est radiale.

$\boxed{\textbf{III - 3.}}$ Les planètes perturbatrices étant toujours supposées extérieures à P_1, on a $x_i \ll 1$. Montrer qu'alors la force perturbatrice totale par unité de masse $\boldsymbol{F}$ peut être approchée par l'expression

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_i \simeq \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{2a_i} \frac{\boldsymbol{r}_1}{a_i^2 - r_1^2}.$$

$\boxed{\textbf{III - 4.}}$ Pour simplifier les notations et le raisonnement, dans cette question ainsi qu'aux trois suivantes, on posera $\mathbf{\Gamma}$ la force totale, par unité de masse, subie par la planète P_1, et on notera Γ son module, de sorte que l'équation du mouvement de la planète P_1 s'écrit formellement

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{\Gamma}(r_1) = \Gamma(r_1)\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1}.$$

L'excentricité de la trajectoire de P_1 étant supposée faible, r_1 est sensiblement égal au demi grand axe a_1 et on pose $r_1 = a_1(1+X)$, avec donc $X \ll 1$. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de X au cours du temps.

$\boxed{\textbf{III - 5.}}$ Considérer le cas particulier pour lequel la planète P_1 suit une trajectoire circulaire de rayon $r_1 = a_1$. En déduire une relation entre σ_1, a_1 et $\Gamma(a_1)$. Que devient l'équation trouvée à la question précédente? Montrer que la période des oscillations de r_1 autour de a_1 est

$$\tau = 2\pi \left[-3\frac{\Gamma(a_1)}{a_1} - \Gamma'(a_1) \right]^{-1/2}$$

$\boxed{\textbf{III - 6.}}$ Par définition, une apside est un point d'une orbite pour lequel la distance au Soleil atteint une valeur extrêmale, et l'angle apsidal ψ est l'angle balayé par le rayon vecteur entre deux apsides consécutives. Montrer que cet angle vaut ici

$$\psi = \pi \left[3 + \frac{a_1 \Gamma'(a_1)}{\Gamma(a_1)} \right]^{-1/2}.$$

Quelle valeur de ψ obtient-on dans le cas particulier d'un champ de force newtonien, en l'absence de force perturbatrice? Interpréter.

$\boxed{\textbf{III - 7.}}$ En déduire une expression de la vitesse angulaire de précession ω_1 du périhélie de la planète P_1 dans ce modèle, en fonction de T_1, a_1, $\Gamma(a_1)$ et $\Gamma'(a_1)$.

$\boxed{\textbf{III - 8.}}$ On va maintenant appliquer ces résultats au cas de la force perturbatrice totale par unité de masse calculée plus haut Montrer que, dans l'approximation introduite au **III - 3**, et en se limitant à l'ordre trois en a_1/a_i, on a

$$\psi = \pi \left[1 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} q_i^3 \right] \quad \text{avec} \quad q_i = \frac{a_1}{a_i}.$$

Calculer la vitesse angulaire de précession ω_1 correspondante. Conclusion?

III - 9. Montrer, en ne s'arrêtant pas à l'ordre trois en q_i, qu'une expression plus correcte de la vitesse angulaire de précession ω_1 est

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2T_1} \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} \frac{3q_i^3 - q_i^5}{\left(1 - q_i^2\right)^2}.$$

Faire l'application numérique et comparer à la valeur observée.

Quatrième partie

Correction relativiste

L'écart entre la vitesse angulaire de précession observée et celle calculée à la question **III - 9** ne saurait être expliqué par la présence d'une hypothétique planète interne à l'orbite de Mercure. En effet, cette planète Vulcain, du nom que lui avait attribué Le Verrier au $\text{XIX}^{\text{è}}$ siècle, aurait dû être observée au cours d'éclipses de Soleil, ce qui n'a jamais été le cas. On va montrer dans cette dernière partie que la théorie de la relativité générale permet d'expliquer cet écart dans le cadre du problème à deux corps.

IV - 1. En relativité générale, on montre que l'équation du mouvement d'une planète dans le champ gravitationnel du Soleil s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\alpha}{\sigma^2} + \frac{3\alpha}{c^2} u^2 \quad \text{avec } c \text{ la vitesse de la lumière et } u = \frac{1}{r}.$$

Justifier que cette équation admet la limite classique correcte.

IV - 2. La résolution de cette équation n'est pas possible exactement, mais le terme correctif est faible et on peut donc trouver une solution par une approche perturbative. On note u_0 la solution classique

$$u_0(\theta) = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_p)}{p},$$

et on cherche la solution u sous la forme $u = u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$. Montrer que u_1 est solution de l'équation différentielle approchée

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\theta^2} + u_1 = \frac{3\alpha^3}{c^2\sigma^4} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos(\theta - \theta_p) + \frac{e^2}{2}\cos\left[2(\theta - \theta_p)\right] \right\}.$$

$\boxed{\textbf{IV - 3.}}$ Résoudre cette équation différentielle en cherchant une solution de la forme

$$u_1(\theta) = A + B\theta \sin(\theta - \theta_p) + C \cos[2(\theta - \theta_p)].$$

Déterminer les coefficients A, B et C, et en déduire l'expression de la solution approchée $u(\theta)$.

$\boxed{\textbf{IV - 4.}}$ Justifier qu'on peut ne conserver qu'un seul des trois termes de la perturbation u_1, sur des temps assez longs. En déduire que l'on peut écrire la solution approchée $u(\theta)$ sous la forme

$$u(\theta) \simeq \frac{1 + e \cos[\xi(\theta)]}{p}.$$

On explicitera $\xi(\theta)$.

$\boxed{\textbf{IV - 5.}}$ En déduire que le périhélie précesse avec une vitesse angulaire donnée par

$$\Omega = \frac{6\pi\alpha}{c^2 a(1 - e^2)T}$$

Faire l'application numérique dans le cas de Mercure et conclure.