

---

## Résonance - Oscillateurs couplés

---

- QUARANTA *Dictionnaire de Physique Expérimentale. TOME 1 Mécanique*
- QUARANTA *Dictionnaire de Physique Expérimentale. TOME 4 Electricité*
- FLEURY et MATHIEU *Acoustique*
- FLEURY et MATHIEU *Courants alternatifs*
- GUYON, HULIN, PETIT *Hydrodynamique Physique*
- MATHIEU *Vibration et phénomènes de propagation, Tome 1*
- JOURNEAUX *TP de physique*
- BUP n 845 (juin 2002) *Le résonateur acoustique de Helmholtz*

## I) Résonance

Pour qu'un système puisse donner lieu à un phénomène de résonance, il faut qu'il ait un ou plusieurs *modes propres* ; c'est-à-dire que, soumis à une perturbation, il revienne à sa position d'équilibre en oscillant avec une ou des fréquences qui sont ses *fréquences propres*, et avec des amplitudes dépendant des conditions initiales. Le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degrés de liberté. Lorsque ce système est soumis à une excitation sinusoïdale permanente, une ou plusieurs réponses (tension, intensité, ...) peuvent présenter un maximum d'amplitude à des fréquences proches de ces fréquences propres : on parle de résonance. L'existence d'une résonance dépend de la grandeur étudiée (il est possible d'avoir une résonance en vitesse et non en position pour un oscillateur amorti) et est le signe d'un transfert d'énergie important entre l'opérateur créant l'excitation et le système.

L'étude des régimes libres renseigne aussi sur la résonance : en tapant sur une cloche, on l'entend "sonner" longtemps (dictionnaire de Littré : "re-sonner" en vieux français) et on peut donc prévoir que si on la soumet à une excitation permanente à sa fréquence propre, elle vibrera avec une grande amplitude. De plus, le fait que l'oscillation libre dure pendant de nombreuses périodes indique que la résonance sera très aiguë (d'amplitude importante, localisée en fréquence et très proche de la fréquence propre), ce qui est quantifié par un grand facteur de qualité. On notera d'ailleurs que quand une résonance est suffisamment grande, on fait souvent une approximation d'oscillateur harmonique amorti autour de la position d'équilibre associé, ce qui revient fréquemment à ne garder que le terme passe-bande associé (approximé comme ordre 2) dans la fonction de transfert.

Le concept de résonance étant très fréquent en physique, il est important de bien se familiariser avec ses différentes manifestations, aussi bien temporelles que fréquentielles et en régime libre ou forcé, ainsi qu'avec l'effet du facteur de qualité sur ceux-ci. On doit par exemple être capable d'estimer le facteur de qualité d'un diapason simplement en mesurant son temps d'amortissement.

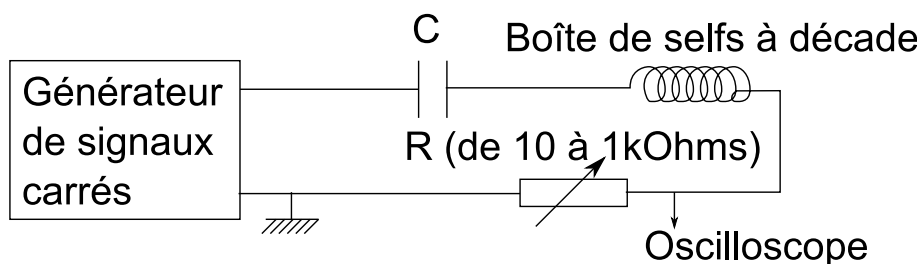
Cette section se décompose en 3 parties : résonance d'un système à 1 degré de liberté ; puis à 2 degrés de liberté ; et enfin à plus de 2 degrés de liberté. Dans le cadre d'un premier TP, la priorité doit être donnée aux montages électriques et aux pendules avec un couplage inertiel, en s'efforçant de bien comprendre toutes les manifestations de la résonances. Les autres montages de mécaniques et d'acoustiques doivent être considérés dans un second temps. Une expérience très importante pour la résonance est aussi l'étude du diapason, qui se trouve dans le montage Ondes I : Acoustiques". Toutes les caractéristiques des circuits d'ordre 2 et de leur résonances ne sont pas toujours données explicitement ; il est cependant conseillé de les considérer et de les tester en parallèle (elles se trouvent dans tout les livres de CPGE).

### 1) Oscillations propres d'un circuit électrique (important)

Cette expérience met en évidence les paramètres de la résonance, que l'on retrouvera dans l'expérience d'oscillations forcées au paragraphe suivant.

On étudie la réponse du circuit à une excitation produite par un échelon de tension délivré par un générateur BF (signal en créneaux de période suffisamment longue). Lorsque la résistance du circuit est inférieure à la résistance critique  $R_c$ , on observe un régime oscillatoire amorti.

On peut vérifier que la résistance critique est liée à  $L$  et  $C$  par  $R_c = 2\sqrt{L/C}$ .



### Note sur le choix des composants

- Choisir  $L$  et  $C$  pour avoir une fréquence propre d'environ  $10kHz$ .
- Choisir  $R$  pour avoir un facteur de qualité assez grand et un signal pas trop petit (compromis à faire).
- La résistance de sortie du BF contribue aussi au facteur de qualité ; il est conseillé d'ajouter un ampli de puissance (réglé sur  $\times 1$ ) à la sortie du BF pour annuler cet effet (quel rôle joue l'ampli de puissance ici ?).
- Pour connaître la résistance du circuit, il faut tenir compte de celle de l'inductance. Elle est facile à déterminer en continu, mais elle dépend de la fréquence, croissant proportionnellement au carré de celle-ci à fréquence élevée (cf. KROB *Électronique expérimentale*). C'est une cause importante d'incertitude.

Sur la courbe obtenue, dans le cas d'un régime oscillatoire amorti, on pourra déterminer la pseudo-période  $\tilde{T} = 2\pi/\tilde{\omega}$  et le décrétement logarithmique  $\delta$  (logarithme népérien du rapport des amplitudes d'oscillations successives),<sup>1</sup> et vérifier qu'ils sont liés à  $R$ ,  $L$  et  $C$  par :

$$\tilde{\omega} \simeq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \delta \simeq \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad .$$

#### Facultatif :

Toujours dans le cas où  $R < R_c$ , on peut observer la tension  $V$  aux bornes de la capacité en fonction du courant traversant le circuit. Pour cela, il faut utiliser un oscilloscope différentiel. La courbe obtenue, dans cet espace appelé espace des phases ( $V \propto q$ ,  $i \propto dq/dt$ ), est une spirale logarithmique. Justifier.

#### Note :

Grâce à une acquisition via un oscilloscope numérique et un ajustement avec Igor, il est possible de déterminer très précisément la pulsation caractéristique et le facteur de qualité. Ceci montre l'intérêt des régimes transitoires pour la mesure des grandeurs clés du phénomène de résonance.

## 2) Oscillations forcées

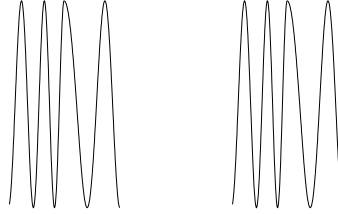
### a) En électricité (important)

#### Principe et utilisation d'un wobulateur

Les termes "wobulateur" et "wobulation" viennent de l'anglais *to wobble*, osciller. On peut également parler de "générateur à balayage de fréquence". Il s'agit de générer un signal électrique

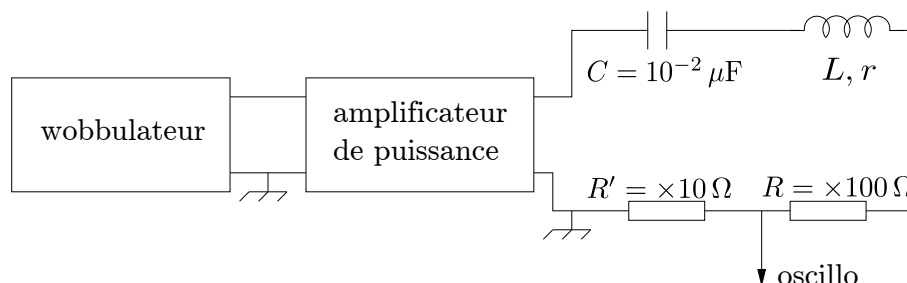
<sup>1</sup>On peut aussi utiliser un logiciel de modélisation (fit), mais cela risque de prendre du temps car le signal n'est pas simple.

quasi périodique, dont la fréquence varie dans le temps de manière contrôlée (modulation de fréquence).



nance. Mesurer sa fréquence et estimer l'erreur commise. Observer autour de la résonance le déphasage entre l'intensité et la tension excitatrice (mode XY).

En utilisant maintenant la wobble, tracer à l'oscilloscope l'intensité dans le circuit en fonction de la fréquence. Montrer que si la résistance augmente, le facteur de qualité  $Q$  diminue.



### Étude de la charge, Résonance en tension

*Attention, cette étude est valable uniquement pour le filtre passe-bas d'ordre 2.*

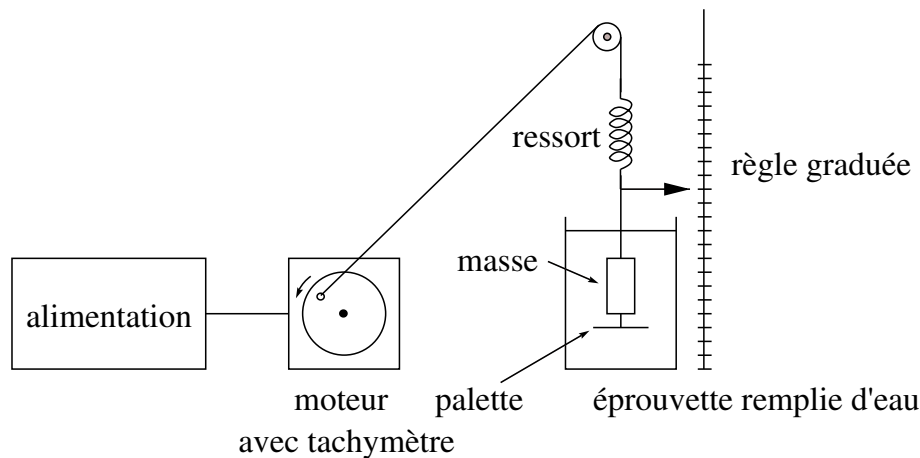
Modifier le circuit pour observer la tension aux bornes du condensateur. Montrer que pour  $Q < 1/\sqrt{2}$ , il n'y a pas de résonance. La fréquence de résonance  $f_{Res} = f_0\sqrt{1 - 1/2Q^2}$  est proche de  $f_0$  dès que la résonance devient raisonnablement aiguë; le vérifier pour 2 ou 3 valeurs de résistance. Observer autour de la résonance le déphasage entre cette tension et la tension excitatrice (mode XY).

*Remarques :*

- Choisir la fréquence centrale de wobble de manière à faire apparaître le pic de résonance sur l'écran.
- Sélectionner une excursion en fréquence plus petite que la fréquence centrale (sinon le wobble cesse de délivrer du signal).
- Pour obtenir une courbe de résonance persistante à l'oscilloscope, on doit diminuer la période  $T$  de wobble; observer cependant ce qui arrive quand cette période devient trop faible. On a en fait intérêt à choisir une fréquence de résonance suffisamment élevée (de l'ordre de  $10kHz$ ), et éventuellement à wobble lentement en utilisant un oscilloscope à mémoire (utiliser le mode d'affichage avec persistance).
- Dans le schéma ci-dessus, on mesure l'intensité aux bornes d'une résistance  $R'$  de valeur fixée. Cela permet de comparer quantitativement l'amplitude des différentes courbes de résonance obtenues en faisant varier le facteur de qualité par l'intermédiaire de l'autre résistance.
- Pour l'étude de la résonance en intensité, on peut remplacer la résistance  $R'$  par un "convertisseur courant-tension" (cf. Amplificateurs Opérationnels).

**L'ordinateur permet également de piloter un wobble, et même de tracer directement les diagrammes de Bode. Entraînez-vous à vous en servir, mais attention aux connexions ! L'ordinateur ne fait que ce qu'on lui donne à faire, ce n'est pas lui qui branche.**

## b) En mécanique (FACULTATIF)



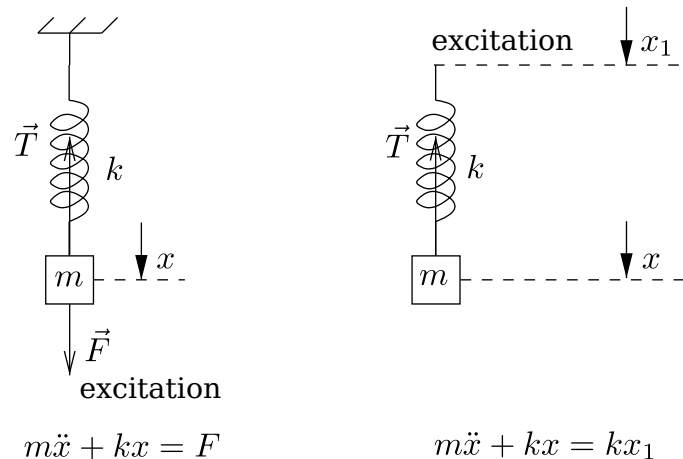
On utilise un appareil qui permet d'étudier les oscillations d'une masse fixée au bout d'un ressort et pouvant être soumise à un frottement fluide (on accroche à la masse des palettes de différents diamètres, l'ensemble oscillant dans une éprouvette remplie d'eau). Le ressort est excité par une ficelle attachée à l'arbre d'un moteur muni d'un excentrique. La fréquence  $f$  peut se mesurer au chronomètre, ou bien on peut utiliser un tachymètre sur l'arbre de rotation (attention aux unités, on mesure ainsi la vitesse de rotation du moteur  $\omega$  en *tours/minute*). L'un des moteurs est également muni d'une dynamo qui permet de mesurer une fréquence électrique. On prendra garde aux rapports de démultiplication entre les différents arbres du moteur. L'amplitude est mesurée à l'aide de la règle graduée du dispositif.

*Attention* : au départ, régler la longueur de façon que la masse soit à peu près au milieu de l'éprouvette. Mettre le moteur en marche et régler sa position de telle sorte qu'à la résonance la masse ne tape pas sur le fond de l'éprouvette.

Étudier les différents régimes de résonance d'amplitude en fonction de l'amortissement ; celui-ci est fonction du diamètre de la palette fixée sous la masse  $m$ . On mesurera l'amplitude des oscillations grâce à un index se déplaçant devant une règle graduée, en fonction de la fréquence. Faire l'analogie avec un circuit électrique résonnant  $RLC$  série. Quels sont les analogues mécaniques de  $R$ , de  $L$ , de  $C$ , du courant et de la tension ?

### Remarques

- Vous avez l'habitude d'étudier (théoriquement) le système oscillant représenté ci-dessous, à gauche ; ici vous étudiez un système un peu différent, à droite. Il a l'avantage de permettre une étude directe de l'amplitude et de la phase de l'excitation (difficile à faire dans le cas de la force pour le système de gauche).
- Ne pas chercher à exploiter quantitativement la courbe de résonance ; ici le régime est turbulent et la force de freinage est plutôt proportionnelle au carré de la vitesse.



### 3) Résonateur de Helmholtz (FACULTATIF)

Le résonateur est constitué d'un volume cylindrique fermé à l'une de ses extrémités par un bouchon plein et à l'autre par un bouchon percé d'un trou de petit diamètre dans lequel on peut insérer des embouts de différentes longueurs (cf. Fig. 1).

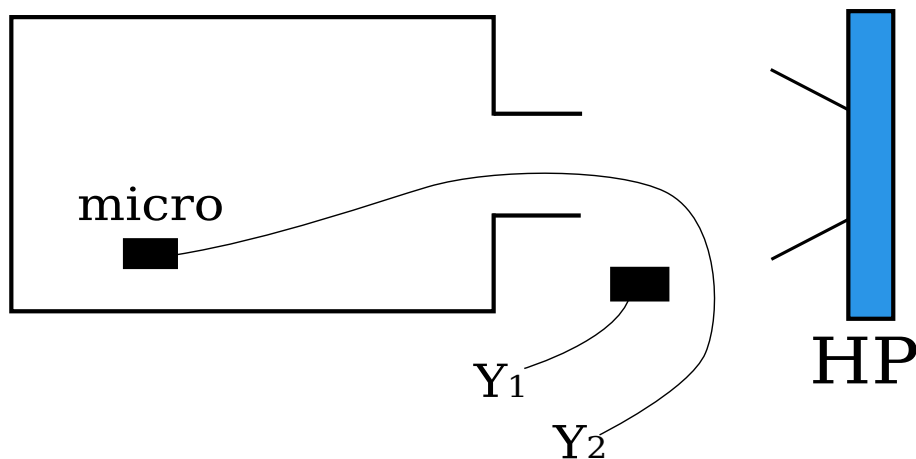


FIG. 1 – dispositif du résonateur de Helmholtz.

Le mode de résonance de Helmholtz correspond à un mouvement d'ensemble de la masse d'air située dans le goulot, l'air dans le volume principal étant quasi immobile. Il correspond au mode de résonance de plus basse fréquence d'un tel système, de l'ordre de  $100\text{Hz}$  pour le système étudié ici. On étudie la résonance de Helmholtz en plaçant l'un des petits microphones à l'intérieur de la cavité et le haut-parleur à quelques centimètres devant le goulot. Pour s'affranchir de la réponse du haut-parleur et des microphones, on place le deuxième micro, supposé identique au précédent (pourquoi?), à l'extérieur de la cavité, juste devant le haut-parleur, et on envoie le signal sur la voie 1 de l'oscilloscope. À l'aide du programme "Bode" dans Igor, on peut alors enregistrer automatiquement la courbe de résonance du système. Toutefois, il faut prendre garde de décocher la case "autoadjust" sans quoi le logiciel va augmenter la tension d'excitation du haut-parleur au-delà de sa limite de linéarité. Ces courbes donnent accès à la fréquence de résonance ainsi qu'au facteur de qualité du résonateur. On comparera ces grandeurs aux valeurs obtenues en régime transitoire. Pour cela, on place l'oscilloscope en mode

monocoup, et on excite le résonateur d'une pichenaude ou en claquant des mains (par exemple ; toute autre méthode conduisant à une excitation impulsionnelle est satisfaisante). Faire l'ajustement de cette réponse par une sinusoïde amortie dont on déduira la période et l'atténuation. Comparer aux valeurs précédentes.

### Interprétation

Dans une première approximation, le résonateur est un oscillateur harmonique dont l'équivalent mécanique est le système masse-ressort. Dans ses mouvements, la masse d'air située dans le goulot comprime l'air du volume principal qui joue le rôle de ressort. Il s'ensuit que la fréquence de résonance est donnée par (voir notice) :

$$f_0 = \frac{C}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{lV}},$$

où  $C$  est la vitesse du son,  $s$  et  $l$  sont la section et la longueur du goulot, et  $V$  est le volume principal. On pourra vérifier cette relation en utilisant des goulots de différentes longueurs. (Plus précisément, dans l'expression de  $f_0$  ci-dessus,  $l$  doit être remplacé par  $l + 8d/3\pi$  où  $d$  est le diamètre intérieur du goulot ; voir notice.)

### Note culturelle

La résonance de Helmholtz est utilisée par exemple dans une guitare, où elle forme le mode le plus grave de sa caisse.

## II) Deux oscillateurs couplés

Deux systèmes sont couplés lorsqu'il peut y avoir des transferts d'énergie entre eux. On se limite aux systèmes à 1 degré de liberté, de sorte que le système couplé possède 2 degrés de liberté. Les équations dynamiques qui pilotent chaque système sont de la forme :

$$A_1 X_1'' + B_1 X_1' + C_1 X_1 = F(X_2'', X_2', X_2).$$

On étudiera les cas où les termes de couplage dépendent uniquement de l'accélération ( $F(X_2'')$  : couplage inductif/inertiel) ou bien de la position ( $F(X_2)$  : couplage élastique)

### 1) Pendules pesants couplés par un fil de torsion

Matériel EUROSAP Deyrolle ; consulter la notice.

- Chaque pendule est lié à un potentiomètre de  $10k\Omega$  qui permet d'enregistrer son mouvement. L'alimenter avec un générateur continu ou, mieux, avec une alimentation double ( $-15V$ ,  $+15V$ ) ; dans ce dernier cas, en prenant la mesure entre le curseur du potentiomètre et le zéro de l'alimentation, on obtient un signal dont la composante continue est faible.
- Vérifier que le fil de torsion qui assure le couplage des pendules est bien serré au niveau de chaque pendule.
- Faire en sorte que les pendules soient visiblement identiques.



- Il n'est pas nécessaire de placer des masses sur les pendules pour obtenir des résultats satisfaisants (on observe plusieurs battements d'environ 10 périodes ; si ce n'est pas le cas, c'est probablement que le fil de torsion est mal serré).

Pour montrer la présence du couplage, partant de l'équilibre, maintenir écarté l'un des pendules et vérifier que l'autre est faiblement entraîné (le couplage est faible, c'est préférable ici).

Montrer l'existence de deux modes propres :

- Le mode symétrique : écarter (pas trop, afin que les équations différentielles restent quasi linéaires) les 2 pendules du même angle et les lâcher. Vérifier qu'il n'y a pas de battement et mesurer la période d'oscillation  $T_{sym}$ .
- Le mode antisymétrique : écarter les 2 pendules en opposition. Mesurer  $T_{antisym}$ .<sup>2</sup>

Montrer qu'en général on a une combinaison de ces modes : écarter l'un des pendules et le lâcher. Commenter les transferts d'énergie. Mesurer la période des battements  $T_{batt}$ .

Vérifier que  $T_{batt}^{-1} = T_{antisym}^{-1} - T_{sym}^{-1}$ .

Il est possible de rendre cette expérience encore plus quantitative en étudiant l'influence des paramètres (moment d'inertie, centre de masse, constante de torsion), mais c'est lourd et fastidieux pour un intérêt faible. Il est préférable de développer cet aspect dans l'expérience des circuits électriques couplés.

## 2) Couplage par mutuelle de deux résonateurs LC

### a) Note sur le couplage par mutuelle

C'est l'équivalent d'un couplage par inertie en mécanique. Le principal avantage de l'étude du couplage par mutuelle est que les équations différentielles sont immédiates à poser car les caractéristiques de chaque circuit sont indépendantes du terme de couplage. L'inconvénient est qu'il faut déterminer la mutuelle par une expérience complémentaire.

### b) Introduction

On considère le montage de la figure 2.

L'ampli de puissance permet de s'affranchir de l'impédance de sortie du GBF. Les transformateurs d'isolement permettent d'isoler les deux circuits oscillants qui ne sont couplés que par la mutuelle  $M$ .

### c) Choix des composants

- On utilise des bobines Jeulin sur support dont on peut repérer la distance (on peut aussi utiliser des bobines Leybold mais leur position n'est pas repérée par un index).

<sup>2</sup>La classification symétrique/antisymétrique donnée ici semble naturelle ; elle suppose le choix d'un plan de symétrie perpendiculaire au fil de torsion. Les rôles s'inversent si l'on prend un plan vertical qui contient le fil de torsion ; on obtient alors une classification cohérente avec celle du couplage capacitif étudié plus loin.

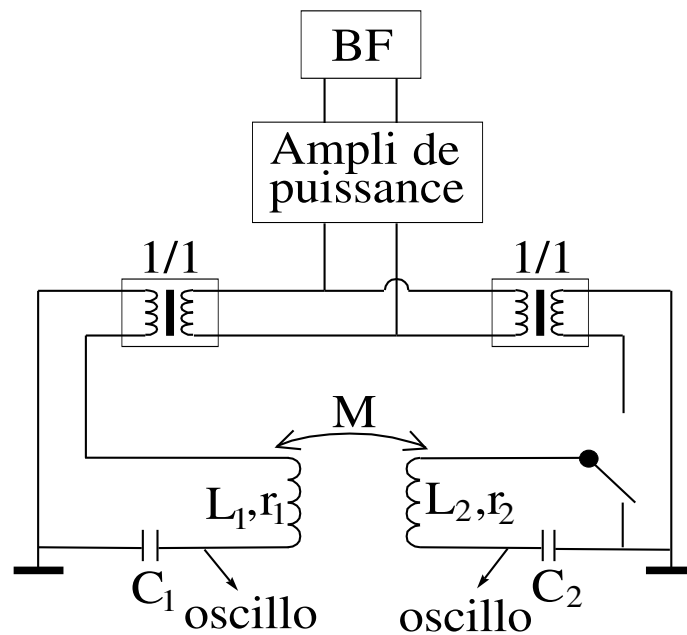


FIG. 2 – Couplage par mutuelle de deux résonateurs LC.

- Commencer par mesurer les caractéristiques des 2 bobines :  $L$  (au  $RLC$ mètre) et  $r$  (en continu à l'ohmmètre); elles doivent être voisines d'une bobine à l'autre sinon changer l'une d'elles.
- Choisir  $C$  de façon à avoir une fréquence de résonance  $f_0$  de l'ordre de  $10kHz$  (à basse fréquence, le facteur de qualité  $Q = L\omega_0/r$  est faible; à haute fréquence, les pertes des bobines augmentent proportionnellement à  $\omega^2$ , réduisant à nouveau  $Q$ ).
- Si  $L_2$  est différente de  $L_1$ , ajuster  $C_2$  de façon que les 2 circuits aient la même fréquence de résonance (sinon la théorie se complique).

#### d) Résonance des circuits couplés en régime sinusoïdal

Seul le circuit 1 est alimenté, l'autre est fermé par un court-circuit. Accoler les 2 bobines pour avoir la mutuelle maximale<sup>3</sup> et faire varier la fréquence manuellement ou, mieux, en "wobblant". Mesurer les 2 fréquences de résonance.

Montrer le rôle du couplage en écartant les deux bobines.

#### e) Excitation de chaque mode propre en régime sinusoïdal

Alimenter les 2 circuits avec les transformateurs, mesurer la fréquence de résonance unique qui apparaît. En comparant les phases des 2 charges, indiquer s'il s'agit du mode symétrique ou antisymétrique qui est excité.

Inverser les bornes de sortie du 2nd transformateur et reprendre l'expérience.<sup>4</sup> Quel mode excite-t-on ainsi ?

<sup>3</sup> Il s'agit d'un couplage sans fer, il faut que le couplage reste faible et le comportement linéaire.

<sup>4</sup> Il ne faut pas changer le signe de la mutuelle au cours de cette expérience, sinon on change les caractéristiques du système et donc on n'étudie plus les modes de ce système.

### f) Régime transitoire

Remplacer l'excitation sinusoïdale par un créneau de longue période (échelon de tension répété). En procédant comme précédemment, mettre en évidence la superposition des 2 modes propres lors d'une excitation quelconque, mesurer la fréquence des battements et comparer aux fréquences déjà mesurées. Pour que les battements soient bien visibles, il faut choisir un couplage faible. Une fois celui-ci trouvé, reprendre les mesures précédentes.

On peut aussi visualiser le régime transitoire de chaque mode indépendamment en choisissant l'excitation adéquate.

### g) Exploitation plus quantitative

Le coefficient de couplage est défini par :  $\theta = M/\sqrt{L_1L_2}$ , où  $M$  est la mutuelle. La théorie indique que, dans le cas où les 2 circuits ont la même fréquence de résonance  $f_0$ , les fréquences propres des circuits couplés sont données par :  $f_1 = f_0/\sqrt{1+\theta}$  et  $f_2 = f_0/\sqrt{1-\theta}$ , ce qui dans le cas d'un couplage faible conduit à la relation :  $T_{batt}^{-1} = T_2^{-1} - T_1^{-1} \simeq \theta T_0^{-1}$ .

Pour le vérifier expérimentalement, il faut mesurer la mutuelle en fonction de la distance entre les bobines (cf. Fig. 3).

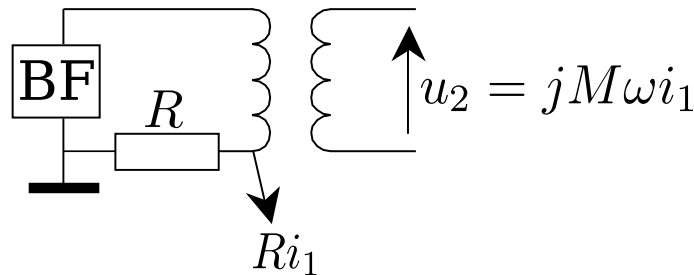
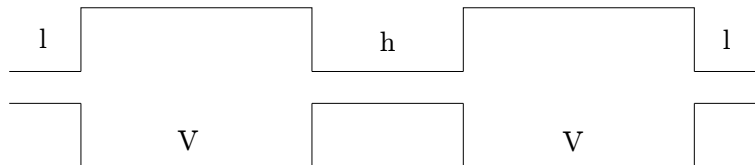


FIG. 3 – Montage pour la mesure de l'inductance mutuelle  $M$ .

On peut faire varier l'induction mutuelle  $M$  en changeant la distance entre les deux bobines ; en montage de type : "bobines de Helmholtz".

### 3) Couplage de deux résonateurs de Helmholtz (FACULTATIF)

Tout comme on peut coupler deux oscillateurs mécaniques ou électriques, les résonateurs acoustiques de Helmholtz peuvent se coupler de la manière indiquée sur la figure ci-dessous.



Dans ce cas, le système peut être modélisé par trois masses (d'air, contenues dans les goulots) séparées par deux ressorts (les volumes principaux). Pour le traitement de ce couplage, on se référera à MATHIEU *Vibrations* (chapitre 5). Les équations du mouvement font apparaître deux modes propres d'oscillation :

- un mode symétrique à  $f_s = f_0$ , où les pressions dans les volumes principaux sont en phase et la masse centrale reste immobile ;
- un mode antisymétrique de fréquence  $f_a$  telle que :  $f_a^2 = f_0^2 + 2F^2$  avec  $F = (C/2\pi)\sqrt{s/hV}$ , où les pressions dans les volumes principaux sont en opposition de phase, la masse centrale ayant un mouvement déphasé de  $\pi$  par rapport à chaque autre masse.

On pourra observer les deux résonances en traçant le diagramme de Bode du système couplé et illustrer la relation quantitative sur quelques exemples de longueur du tube de couplage (on peut se contenter de rechercher les fréquences de résonance pour gagner du temps). On peut également visualiser les phases des oscillations dans chacun des deux résonateurs et exciter sélectivement les modes symétrique et antisymétrique à l'aide de deux haut-parleurs branchés convenablement.

Par ailleurs, on peut étudier la résonance dans le cas où l'un des deux oscillateurs couplés a un fond plein (pas de deuxième goulot). On montre dans ce cas que les résonances ont lieu pour les fréquences ( $h = l$ )

$$f_+ = f_0 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad f_- = f_0 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Observer. Justifier.

### III) Systèmes à plus de 2 degrés de liberté

Il y a dans la collection un ensemble de 8 oscillateurs électriques LC couplés. On se référera à la notice ("Chaîne d'oscillateurs couplés", Notice 40).